J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
31 (1990) 859-911

SUR LES STRUCTURES AFFINES HOMOTOPES À ZÉRO DES GROUPES DE LIE

NGUIFFO B. BOYOM

Dédié à Jean-Louis Koszul et au regretté Yozo Matsushima

Introduction

Ce travail fait suite à deux travaux antérieurs consacrés respectivement au problème général d'existence de structures affines dans les groupes de Lie nilpotents [4], et au problème de relèvement de structures affines dans les extensions centrales des groupes de Lie nilpotents [5]. Sauf mention expresse du contraire les structures affines dont il est question dans les groupes de Lie sont supposées invariantes par les translations à gauche.

Le problème central traité dans le preésent travail est le problème d'extension des structures affines définies dans des sous-groupes de Lie connexes maximaux des groupes de Lie nilpotents. Afin de motiver le lecteur, voici une formulation plus explicite du problème d'extension. On fixe dans un groupe de Lie nilpotent G un sous-groupe de Lie connexe maximal G_0 ; on suppose que G_0 est muni d'une structure affine déterminée par une structure localement plate invariante à gauche (G_0, ∇_0). Existe-t-il dans G une structure localement plate invariante à gauche (G, ∇) qui induit dans G_0 la structure donnée (G_0, ∇_0) ? Cette question se trouve au cœur du problème d'existence de structures affines complètes des groupes de Lie nilpotents. En effet une structure affine complète dans un groupe de Lie nilpotent G est toujours compatible avec une suite de Jordan-Hölder de G ([1], [19], [20]).

Dans le présent travail on définit une classe particularière de structures affines dites homotopes à zéro. Cette propriété d'être homotope à zéro est une condition nécessaire à l'extension, mais elle n'est pas suffisante (voir Exemple 4.2.E $_4$). On a centré l'analyse sur les structures affines normales qui ont des propriétés topologiques dites $\mathscr{P}_F$. La découverte remarquable et décisive est que ces propriétés $\mathscr{P}_F$ permettent de voir que le problème d'extension de structure affine apparait comme l'équivalent géométrique du problème topologique d'Effacement à la Hochschild-Iwasawa-Koszul

Received February 23, 1987 and, in revised form, January 25, 1989.

des classes de cohomologie des groupes à coefficients dans un module. *Cette propriété est clairment établie* au §4.2.E (voir Théorème 4.2.E $_1$).

Nous allons résumer le genre des résultats centraux qu'on obtient grâce aux propriétés $\mathscr{P}_F$. Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe. Soit $F(G) = \{e\} \subset G_1 \subset \cdots \subset G_k \subset \cdots \subset G$ une suite de Jordan-Hölder normal de type central. On considère un couple (G_Ω, G_D) de groupes de Lie nilpotents connexes. On suppose que G_Ω est une extension centrale de codimention 1 de G et on note $\pi: G_\Omega \to G$ la projection canonique; on suppose enfin que G est une sous-groupe connexe maximal de G_D et que $F(G) \subset G_D$ est une suite de Jordan-Hölder normale de G_D. On munit G_Ω de la suite $\pi^{-1}(F(G))$. On a alors

Théorème. *Les notations étant celles ci-dessus, le groupe de Lie* G *possède une structure affine qui vérifie les conditions suivantes*:

(a) *elle induit dans chaque sous-groupe* G_k *de* $F(G)$ *une structure affine complète*;

(b) *pour chaque couple* (G_Ω, G_D) *comme ci-dessus il existe dans* G_Ω *et dans* G_D *des structures affines qui vérifient la condition* (a) *pour* $F(G_\Omega)$ *et* $F(G_D)$ *respectivement et telles que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} G_\Omega \arrow[d, "\pi"'] & \\ G \arrow[r] & G_D \end{tikzcd}$$

soit un diagramme de structures affines;

(c) *on peut choisir les structures affines de* G_Ω *et de* G_D *de* (b) *de sorte qu'elles jouissent encore des propriétés* (a) *et* (b).

Ce travail est divisé en six paragraphes; en voici une brève analyse.

Le premier paragraphe est consacré aux rappels des notations qui sont utilisées dans la suite. On y donne une formulation plus explicite des problèmes qui sont traités.

Le deuxième paragraphe est consacré pour l'essentiel à la description des certains complexes de cochaines dont des classes de cohomologie jouent des rôles dans les problèmes d'extension et de relèvement de structures affines.

Le troisième paragraphe est consacré à la formulation topologique du problème d'extension et du problème de relèvement en terme de théorèmes de nullité de certaines classes de cohomologie des complexes décrits au deuxième paragraphe. Le Théorème 3.3.1 est donc en fait un théorème d'effacement à la Hochschild-Iwasawa-Koszul [21].

Au quatrième paragraphe on introduit les structures normales qui vèrifient les propriétés $\mathscr{P}_F$. Ces propriétés ont une signification géométrique qui est donnée sous la forme de commentaire. On y montre également comment les propriétés $\mathscr{P}_F$ permettent de rammener le problème géométrique d'extension de structures affines au problème topologique d'effacement des classes de cohomologie. Le résultat central de ce paragraphe est le Théorème 4.2.1 qui permet ultérieurement d'étendre les propriétés $\mathscr{P}_F$ à certaines extensions et à certains relèvements des structures afffines qui vérifie $\mathscr{P}_F$.

Le cinquième paragraphe est consacré pour l'essential à la démonstration du théorème d'existence des structures affines qui vérifient $\mathscr{P}_F$. Le Théorème 5.2.1 est pour ainsi dire la "Finale".

Le sixième paragraphe indique deux sorties intéressantes, l'une vers les variétés affines homogènes; la seconde vers la géométrie symplectique.

Le lecteur trouvera tout au long de ce travail de nombreux exemples qui ont pour but soit d'illustrer les notions introduites, soit d'en légitimer la nécessité.

Remerciements

Au commencement de mon apprentissage de métier de recherche scientifique en 1967 Messieurs Jean-Louis Koszul et le regretté Yozo Matsushima m'apprirent les rudiments de la théorie des structures de variétés localement plates (voir [2]), ainsi que l'importance de ces structures dans certaines questions de l'analyse complexe et de la géométrie (e.g., voir les travaux de Pyatecki-Shapiro, E. B. Vinberg et al. sur la théorie des fonctions automorphes et la théorie des cônes convexes homogènes...). Une dizaine d'années plus tard j'eus la joie d'exposer dans le cadre du Séminaire de Géométrie de Montpellier (France) les travaux de John Milnor sur "les groupes fondamentaux des variétés affinement plates complètes [18], où fut posé en 1977 le problème fondamental de l'existence dans les groupes de Lie résolubles de structures localement plates complètes invariantes à gauche. Si en 1977 le problème de l'existence dans un groupe de Lie de structure localement plate invariante à gauche n'est pas une nouveauté pour quiconque a été un moment élève de Monsiur Koszul, le cadre topologique dans lequel John Milnor fit resurgir ce problème donna à ce dernier un regain d'intérêt; cela conjointement avec le rôle important des variétés affinement plates en géométrie symplectique (feuilletages lagrangiens) m'incita à partir de 1979 à y consacrer une part importante de mon investissement. Depuis quelques années des Personnalités Outre Atlantique ont

fait circuler dans un large publique scientifique un manuscrit consacré au problème de l'existence des structures affines dans les groupes de Lie nilpotents [4]. Cela me valut en 1984 d'être invité par American Mathematical Society à participer à Brunswick au "Joint Summer Research Conferences in Mathematical Science" où furent exposés des résultats à l'époque partiels qui ont abouti à [5]. Je saisi l'opportunité qu'offre la publication du présent travail pour remercier tout particulièrement les Professeurs T. Milnor, C. C. Moore, S. T. Yau qui, à des moments divers, m'ont communiqué des commentaires et critiques fort instructives. Ces critiques et commentaires, quelquefois fort flatteurs, ont permis à des intuitions mal formulées de donner jour à des théorèmes.

I. Structures affines et structures de variété localement plate

Sauf mention expresse du contraire les variétés différentiables qui sont considérées dans ce travail sont connexes et paracompactes. Tous les objets géométriques définis dans les variétés différentiables sont supposés différentiables; la classe de différentiablité est C^∞.

1.1. Structure de variété localement plate. Soit M une variété différentiable de dimension m. Soit ∇ la dérivation covariante d'une connexion linéarie définie dans M. Soient $\mathscr{R}$ et $\mathscr{C}$ les tenseurs de courbure et de torsion de ∇. Pour des champs de vecteurs X, Y et Z définis dans M on a

$$\mathscr{R}(X, Y)\cdot Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z,$$
$$\mathscr{C}(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Lorsque les tenseurs $\mathscr{R}$ et $\mathscr{C}$ sont identiquement nuls on dit que la connexion ∇ est localement plate.

Définition 1.1.1. Une structure de variété localement plate consiste en un couple (M, ∇) où M est une variété différentiable et ∇ est une connexion linéarie localement plate définie dans M.

Soit $\mathbb{R}^m$ l'espace numérique muni de sa structure de variété différentiable naturelle. Soit Γ_a le pseudo-groupe de Lie transitif dans $\mathbb{R}^m$ engendré par les germes des transformations affines inversibles de $\mathbb{R}^m$ ([10], [22], [23]).

Définition 1.1.2. Une structure affine dans M consiste en la donnée dans la structure différentiable de M d'un Γ_a-atlas $\mathscr{U} = \{(U_i, \Phi_i)_{i\in I}\}$.

Soit (M, ∇) une variété localement plate. Soit $x \in M$; notons $U(x)$ un voisinage ouvert de x qui est normal relativement à la connexion linéaire ∇ [11]. L'ouvert $U(x)$ est l'image par l'application exponentielle Exp_∇ d'un voisinage ouvert convexe de l'origine de T_xM; soient y et y'

des points dans $U(x)$, il existe une unique géodésique de ∇ d'extrémités y et y' et toute entière contenue dans $U(x)$. L'atlas constitué des cartes locales $(U(x), (\mathrm{Exp}_\nabla)^{-1})$ est un Γ_a-atlas. Inversement supposons que $(M, \mathscr{U})$ soit une structure de variété affine, $\mathscr{U} = (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ étant un Γ_a-atlas. On associe alors à $(M, \mathscr{U})$ la variété localement plate (M, ∇) où la connexion llinéaire ∇ est définie dans les cartes $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ par

$$\nabla\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} = 0, \qquad i = 1, \cdots, n,$$

où $(x_1^\alpha, \cdots, x_n^\alpha)$ sont les coordonnées locales associées à la cart $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. La connexion ainsi définie est visiblement localement plate. On obtient ainsi le résultat bien connu (voir e.g. [9], [8]).

Proposition. *Toute structure de variété localement plate (M, ∇) détermine une et une seule structure affine $(M, \mathscr{U})$ et réciproquement.*

1.2. Structures affines des groupes de Lie. Les groupes de Lie qui sont considérés sont réels. Soit G un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche est notée $\mathfrak{G}$. Soit (G, ∇) une structure de variété localement plate définie dans G. Pour tout $\alpha \in G$ soit L_α la translation à gauche par l'èlément α; L_α est un difféomorphisme de la variété G. On dit que la structure localement plate (G, ∇) est invariante à gauche si la connexion linéarie ∇ est invariante par les translations à gauche L_α, $\alpha \in G$. Compte tenu de la proposition ci-dessus les L_α sont des transformations affines de la structure affine associée à (M, ∇). Supposons que (G, ∇) soit une structure localement plate invariante à gauche dans le groupe de Lie G; soient X et Y des champs de vecteurs invariants à gauche, alors le champ de vecteurs $\nabla_X Y$ est invariant à gauche. On associe donc à (G, ∇) la représentation linéaire $\rho\colon \mathfrak{G} \to \mathrm{End}[\mathfrak{G}]$ définie par

$$\rho(X)Y = \nabla_X Y.$$

La platitude locale de (G, ∇) entraine que la représentation ρ jouit des propriétés suivantes: Pour tout triplet (X, Y, Z) d'éléments de $\mathfrak{G}$ on a

(a) $\rho(X)Y - \rho(Y)X = [X, Y]$,
(b) $\rho(\rho(X)Y)Z - \rho(X)\rho(Y)Z = \rho(\rho(Y)X)Z - \rho(Y)\rho(X)Z$.

Définition 1.2.1. Une structuree de Koszul-Vinberg dans un groupe de Lie G consiste en la donnée dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ d'une multiplication $(X, Y) \to X \cdot Y$ qui vérifie les deux conditions suivantes

(a) $XY - YX = [X, Y]$,
(b) $(XY)Z - X(YZ) = (YX)Z - Y(XZ)$.

On voit qu'il y a correspondance bijective entre les structures localement plates invariantes à gauche dans G et les structures de Koszul-Vinberg. Dans la suite on dira KV-structure de G au lieu de structure de Koszul-Vinberg; ces structures se recontrent dans de nombreux problèmes de topologie et de géométrie ([7], [12], [6], [7], [8], [26], $\cdots$).

Définition 1.2.2. Une structure affine dans G est appelée *structure affine de groupe de Lie* si elle est associée à une structure localement plate invariante à gauche.

Compte tenu des correspondances décrites précédemment toute propriété de structure localement place invariante à gauche a son analogue dans la KV-structure associée. Une structure affine est dite complète lorsqu'elle est associée à une structure localement plate (M, ∇) compléte; ce qui signifie que les géodésiques de la connexion linéaire ∇ sont définies dans $\mathbb{R}$ tout entier. On a en particulier le résultat suivant:

Proposition 1.2.1. ([7], [8], [3]). *Soit (G, ∇) une structure localement plate invariante à gauche dans le groupe de Lie G; soit $(X, Y) \to XY$ la KV-structure obtenue en posant $XY = \nabla_X Y$. Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) *La connexion linéaire ∇ est complète*;

(ii) *pour tout élément fixé $Y_0 \in \mathfrak{G}$ l'application linéaire $X \to XY_0 + X$ est bijective*;

(iii) *il existe une action affine simplement transitive du revêtement universel $\tilde{G}$ de G dans l'espace vectoriel $\mathfrak{G}$ dont la différentielle en l'élément neutre est l'homomorphisme $X \to (X, \nabla_x) \in \mathfrak{G} \times \mathrm{End}(\mathfrak{G})$.*

Soit (G, ∇) une structure localement plate qui vérifie une des conditions (i), (ii), (iii) de la Proposition 1.2.1; alors G est nécessairement un groupe de Lie résoluble ([18], [3]).

Ce travail est consacré pour l'essentiel à l'étude de certaines structures localement plates invariantes à gauche dans les groupes de Lie nilpotents. Il revient au méme de se placer au niveau local, c'est-à-dire au niveau des algèbres de Lie nilpotentes.

1.3. Drapeau normal de type central d'une algèbre de Lie nilpotente. Nous allons mettre en évidence certaines propriétés des structures affines des groupes de Lie nilpotents. La plupart de ces propriétés ne sont pas nouvelles, mème si les démonstrations que j'en donne ici diffèrent assez souvent de celle qui existent dans la littérature (voir e.g. [1], [19], [20]).

Dans tout ce qui suit G est un groupe de Lie nilpotent d'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ et V est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Soit $(\mathfrak{q}, \mathfrak{f})$ un homomorphisme continu de G dans le groupe affine $V \times \mathrm{GL}(V)$ de V. On désigne par V^0 le nilespace de la représentation $\mathfrak{f}$ et par V^* le sous-ensemble de V constitué des points fixes de l'action affine de G dans V déterminée par $(\mathfrak{q}, \mathfrak{f})$.

Proposition 1.3.1. *Soit* $(\mathfrak{q}, \mathfrak{f})$ *une loi d'opération affine de* G *dans* V. *Si le nilespace* V^0 *est réduit au sous-espace nul, alors il existe un point* $v \in V^*$.

Preuve (voir Bourbaki, groupe et algèbre de Lie ch. 3 or 4). On fait opérer G dans $W = V \times \mathbb{R}$ en posant

$$g \cdot (v, t) = (\mathfrak{f}(g)v - t\mathfrak{q}(g), t).$$

La projection $(v, t) \to t$ est un G-homomorphisme surjectif; $\mathbb{R}$ étant considéré comme G-module trivial. Puisque G est nilpotent W^0 se projette sur $\mathbb{R}^0 = \mathbb{R}$. Si $V^0 = \{0\}$ alors W^0 est une droite engendré par un élément $(v_0, 1)$ avec $v_0 \neq 0$. On a donc $(\mathfrak{f}(g)v_0 - \mathfrak{q}(g), 1) = (v_0, 1)$ quel que soit $g \in G$; cela montre que le $\mathfrak{f}$-cocycle $\mathfrak{q}$ est cohomologue à zéro et l'élément $-v_0 \in V^*$.

La proposition a comme conséquence le corolaire suivant.

Théorème 1.3.1 ([1], [19], [20]). *Soit* $(\mathfrak{q}, \mathfrak{f})$ *comme dans la Proposition* 1.2.2; *si* $(\mathfrak{q}, \mathfrak{f})$ *détermine une loi d'opération affine transitive de* G *dans* V, *alors* $V^0 = V$.

Démonstration. Puisque $(\mathfrak{q}, \mathfrak{f})$ est transitive, la Proposition 1.2.2 entraine que $V^0 \neq (0)$. Par ailleurs ce sous-espace V^0 est stable par la représentation linéaire $\mathfrak{f}$ de G dans V. Le couple $(\mathfrak{q}, \mathfrak{f})$ détermine donc une représentation affine $(\tilde{\mathfrak{q}}, \tilde{\mathfrak{f}})$ de G dans V/V^0; cette représentation détermine une loi d'opération transitive de G dans V/V^0. Si $V^0 \neq V$ la Proposition 1.2.2 assure que $(V/V^0)^0 \neq (0)$. Comme G est nilpotent on a $\pi(V^0) = (V/V^0)^0$, ce qui contredit le fait que $(V/V^0)^0 \neq (0)$. Le Théorème 1.2.3 est démontré.

Le classique Théorème 1.2.3 dit donc que chaque fois qu'un groupe de Lie nilpotent G opère affinement et transitivement dans V, il existe dans V un drapeau qui est stable par la partie linéaire de la représentation affine $G \to \mathrm{Aff}(V)$. Voilà pourquoi au numéro 1.3 ci-dessous on s'intéressera aux drapeaux dans les algèbres de Lie nilpotents.

Le Théorème 1.2.3 permet en fait de caractériser les lois d'opérations affine transitives des groupes de Lie nilpotents (voir e.g. [1]) comme le prouve le théorème suivant.

Théorème 1.3.2 (théorème de transitivité). *Soit* $(\mathfrak{q}, \mathfrak{f})$ *une loi d'opération affine d'un groupe de Lie nilpotent* G *dans un* V. *Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes*:

(a_1) $(\mathfrak{q}, \mathfrak{f})$ *est transitive.*

(a_2) $V^0 = V$ *et il existe dans* V *un* v *dont l'orbite est ouverte.*

Démonstration. Le fait que (a_1) $\Rightarrow$ (a_2) résulte du Théorème 1.2.3. Pour montrer que (a_2) $\Rightarrow$ (a_1) on procède par récurrence sur la dimension de V. Si $\dim V = 1$, alors G opère par translation dans V. L'existence d'un $v \in V$ dont l'orbite est ouverte entraine que $(\mathfrak{q}, \mathfrak{f}) = (\mathfrak{q}, \mathrm{Id}_v)$ induit un homomorphisme continu non constant q de l'abélianisé $G/[G, G]$ dans V ; une telle application est nécessairement surjective.

Supposons maintenant que le Théorème 1.2.4 soit vrai en dimensions $\leq n$ et soit V un espace vectoriel de dimension $n+1$. Considérons une loi d'opération affine $(\mathfrak{q}, \mathfrak{f})$ d'un groupe de Lie nilpotent G dans V qui vérifie (a_2). Il existe alors dans V une droite vectorielle Δ qui est stable par la représentation linéaire $\mathfrak{f}$ point par point. Soit $G_\Delta = \mathfrak{q}^{-1}(\Delta)$, c'est un sous-groupe de Lie de G et la restriction à Δ de $(\mathfrak{q}, \mathfrak{f})|_{G_\Delta}$ est transitive.

Notons $(\tilde{\mathfrak{q}}, \tilde{\mathfrak{f}})$ la représentation affine de G dans V/Δ héritée de $(\mathfrak{q}, \mathfrak{f})$ par passage au quotient. Puisque la projection canonique $V \xrightarrow{\pi} V/\Delta$ est ouverte, $(\tilde{\mathfrak{q}}, \tilde{\mathfrak{f}})$ vérifie (a_2). L'hypothèse de récurrence assure que $(\tilde{\mathfrak{q}}, \tilde{\mathfrak{f}})$ est transitive. Ainsi quels que soient v et v' dans V il existe $g \in G$ tel que $\pi(v') = \tilde{\mathfrak{f}}(g)\pi(v)+\tilde{\mathfrak{q}}(g)$. Autrement dit il existe $(g, \delta) \in G \times \Delta$ tel que $v' = \mathfrak{f}(g)v+\mathfrak{q}(g)+\delta$. Soit G_v le sous-groupe stabilisateur de v, l'inclusion $\Delta \subset V$ montre que G_v ne dépend que de $\pi(v) \in V/\Delta$. Puisque $\pi : V \to V/\Delta$ est un G-homomorphisme la transitivité de $(\tilde{\mathfrak{q}}, \tilde{\mathfrak{f}})$ implique que toute classe $\bar{v} = \pi(v)$ possède un représentant dans l'orbite de l'origine $G(0)$, $0 \in V$, et puisque $\dim G_v$ ne dépend que de $\pi(v)$ on voit que $\dim G_v = c^{te}$, $v \in V$. L'existence d'un point à orbite ouverte pour $(\mathfrak{q}, \mathfrak{f})$ entraîne que $(\mathfrak{q}, \mathfrak{f})$ est transitive, cela termine la démonstration du Théorème 1.2.4.

Commentaire. Le lecteur trouvera dans [1] une démonstration d'un énoncé analogue à celui du Théorème 1.2.4. Dans [1] on suppose que l'action affine associée à $(\mathfrak{q}, \mathfrak{f})$ est localement libre en l'origine (hypothèse non nécessaire ici). Ce qui est frustrant dans la démonstration de [1] est qu'on y applique un théorème d'existence de sous-groupe à un paramétre de translations non triviales. On sait qu'un tel sous-groupe n'existe pas toujours. Voici une famille de lois d'opération affine sans sous-groupe à un paramètre de translations non triviales.

On munit $\mathbb{R}^4$ de la loi crochet suivante

$$\begin{aligned}[X, X'] &= [(x, y, z, t), (x', y', z', t')] \\ &= (yz' - y'z + tz' - t'z, 0, ty' - t'y, 0).\end{aligned}$$

A tout $(u, v) \in \mathbb{R}^4$ on associe l'application $(\mathfrak{q}, \mathfrak{f}_{uv})$ de $\mathbb{R}^4$ dans $(\mathbb{R}^4 \times \mathrm{End}(\mathbb{R}^4))$ définie par $\mathfrak{q} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}$, et

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}_{uv}&(x, y, z, t) \cdot (x', y', z', t') \\ &= (yz' + tz' - utt', zz' + tx' + t'x - vtt', -yt' - tt', 0).\end{aligned}$$

Le couple $(\mathfrak{q}, \mathfrak{f}_{uv})$ est un homomorphisme d'algèbre de Lie. Soit G le groupe de Lie connexe et simplement connexe dont l'algèbre de Lie est $\mathbb{R}^4$ muni du crochet défini ci-dessus. Il existe un homomorphisme continu $(\mathfrak{q}, \mathfrak{f}_{uv})$ de G dans le groupe $\mathbb{R}^4 \times \mathrm{GL}(\mathbb{R}^4)$ dont la différentielle en l'élément neutre est $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}, \mathfrak{f}_{uv})$. En vertu du Théorème 1.2.4 $(\mathfrak{q}, \mathfrak{f})$ détermine une action transitive de G dans $\mathbb{R}^4$. On observe que $\mathfrak{f}_{uv}$ étant injective il n'existe pas de sous-groupe à un paramétre de translations non triviales. C'est D. Fried qui le premier a construit un exemple d'action transitive sans sous-groupe à un paramétre de translations non triviales (voir aussi [8]). La famille $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}, \mathfrak{f}_{uv})$ montre aussi qu'en général le drapeau dont l'existence est assurée par le Théorème 1.2.3 n'est pas un drapeau d'idéaux. C'est entre autres en raison de ces remarques qu'on va s'intéresser à des drapeaux particuliers dans les algèbres de Lie nilpotentes.

Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie nilpotente. Soit $(C_k(\mathfrak{G}))_k$ la suite centrale descendante de $\mathfrak{G}$; cette suite est définie par récurrence de la façon suivante: $C_0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$, $C_{k+1}(\mathfrak{G}) = [\mathfrak{G}, C_k(\mathfrak{G})]$. Les sous-espaces $C_k(\mathfrak{G})$ sont des idéaux caractéristiques de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$. On a évidemment les relations d'inclusion

$$C_{k+1}(\mathfrak{G}) \subset C_k(\mathfrak{G}).$$

Soit $F(\mathfrak{G})$ un drapeau défini dans l'espace vectoriel $\mathfrak{G}$; on a

$$F(\mathfrak{G}) = 0 \subset \mathfrak{G}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{G}_k \subset \cdots \subset \mathfrak{G},$$

où $\mathfrak{G}_k$ est un sous-espace vectoriel de dimension k de $\mathfrak{G}$.

Définition 1.3.1. Le drapeau $F(\mathfrak{G})$ est dit normal lorsque les sous-espaces vectoriels $\mathfrak{G}_k$ sont les idéaux de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$.

Tout algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{G}$ possède un drapeau normal; de plus tout idéal $\mathfrak{H}$ d'une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{G}$ coincide avec un sous-espace d'un drapeau normal de $\mathfrak{G}$.

Définition 1.3.2. Un drapeau normal $F(\mathfrak{G})$ est dit de type central lorsque $F(\mathfrak{G})$ est plus fin que la suite centrale descendante $(C_k(\mathfrak{G}))_k$.

Si $F(\mathfrak{G}) = 0 \subset \mathfrak{G}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{G}_k \subset \cdots$ est normal de type central alors chacun des idéaux $C_k(\mathfrak{G})$ coincide avec un des idéaux de la filtration $F(\mathfrak{G})$. En vertu de la Proposition 1.2.1 chaque KV-structure complète définie dans un groupe de Lie nilpotent G préserve un drapeau $F(\mathfrak{G})$

défini dans son algèbre de Lie $\mathfrak{G}$. En général le drapeau ainsi obtenu n'est pas normal.

Exemple 1.3.1. Soit $\mathfrak{G}$ l'algèbre de Lie de dimension 4 définie ci-dessus et dont le crochet est défini en les coordonnées notées (z, x, y, t) par la formule suivante

$$[(z, x, y, t), (z', x', y', t')] = ((x+t)y' - (x'+t')y, 0, tx' - t'x, 0).$$

On définit dans $\mathfrak{G}$ comme décrit plus haut la KV-structure associée à la représentation qui associe à (z, x, y, y) la matrice carrée

$$\rho(z, x, y, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x+t & -t \\ t & 0 & y & z-t \\ 0 & 0 & 0 & -x-t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a visiblement

$$\begin{aligned} &\rho(z, x, y, y)\cdot(z', x', y', t') - \rho(z', x', y', t')\cdot(z, x, y, t) \\ &\quad = [(z, x, y, t), (z', x', y', t')]. \end{aligned}$$

L'idéal dérivé $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ est l'algèbre de Heisenberg de dimension 3 et $\mathfrak{G}$ est l'extension de $\mathbb{R}e_4$ par $\mathfrak{H}_3$ associée à la dérivation de $\mathfrak{H}_3$ dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est

$$\nabla = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Δ est nilpotent; ce qui assure que $\mathfrak{G}$ est nilpotente. On vérifie aisément que la KV-structure associée à ρ vérifie la condition (ii) de la Proposition 1.2.1. En fait si on fixe (z', x', y', t') l'unique solution du systèmpe suivant

$$\begin{cases} z + xy' + ty' - tt' = 0, \\ x + yy' + tz' + t'z - tt' = 0, \\ y - t'x - tt' = 0, \\ t = 0 \end{cases}$$

est $(z, x, y, t) = (0, 0, 0, 0)$. Soit $F(\mathfrak{G})$ le drapeau engendré par la suite (e_2, e_1, e_3, e_4) ; ce drapeau est préservé par ρ ; en fait la matrice de ρ dans la base (e_2, e_1, e_3, e_4) devient

$$\tilde{\rho}(x, z, y, t) = \begin{bmatrix} 0 & t & y & z-t \\ 0 & 0 & x+t & -t \\ 0 & 0 & 0 & -x-t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cependant le drapeau $F(\mathfrak{G})$ n'est pas normal.

1.4. Quelques propriétés des KV-structures normales complètes. Nous fixons un groupe de Lie nilpotent G dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{G}$. On suppose que G est muni d'une structure localement plate invariante à gauche (G, ∇). Soit $(\mathfrak{G}, \rho)$ la KV-structure déterminée par (G, ∇). Si (G, ∇) st normale et complète alors $(\mathfrak{G}, \rho)$ préserve un drapeau $F(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{G}_t \subset \cdots \subset \mathfrak{G}$ dont chaque sous-espace vectoriel $\mathfrak{G}_k$ est un idéal de dimension k de $\mathfrak{G}$. Nous supposerons par commodité que $\mathfrak{G}$ est connexe et simplement connexe. Il existe un homomorphisme continu $(\mathfrak{q}, \mathfrak{f})$ de G dans $\mathfrak{G} \times \mathrm{GL}(\mathfrak{G})$ dont la différentielle en l'élément neutre est $(\mathrm{id}_{\mathfrak{G}}, \rho)$. En vertu du Théorème 1.2.3 la complétude de (G, ∇) assure que le sous-groupe $f(G)$ de $\mathrm{GL}(\mathfrak{G})$ est unipotent; cela veut dire que les éléments de $f(G)$ sont des matrices unitriangulaires

$$\begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, soit G_k le sous-groupe de Lie connexe associé à l'idéal $\mathfrak{G}_k$ du drapeau $\mathfrak{G}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{G}_k \subset \cdots \subset \mathfrak{G}$. Chaque sous-groupe G_k hérite d'une KV-structure complète; de sorte que les flèches de la suite exacte suivante

$$\mathbb{1} \to G_k \to G \to G/G_k \to \mathbb{1}$$

sont des applications "affines". On a en particulier les deux cas extrêmes suivants:

$$\mathbb{1} \to G_1 \to G \to G/G_1 \to \mathbb{1},$$
$$\mathbb{1} \to G_{n-1} \to G \to G/G_{n-1} \to \mathbb{1},$$

où $n = \dim G$. Chacun des groupes G_1 et G/G_{n-1} est isomorphe soit à $\mathbb{R}$, soit à S^1 ; chacun de ces groupes a une unique structure complète qui est sa structure triviale. Le Théorème 1.2.3 assure que toute structure normale complète dans G est obtenue à partir d'une structure analogue définie soit dans G_{n-1} soit dans G/G_1 ; on obtient donc la structure de G soit par relèvement d'une structure dans G/G_1 soit par extension d'une structure dans G_{n-1}. Cela explicite et légitime l'attention portée aux structures complètes normales ainsi qu'aux problèmes d'extension et de relèvement de ces structures. Le problème de relèvement a fait l'objet de [4]. Ce problème réapparaitra de temps en temps dans le présent travail.

Considérons une structure localement plate invariant à gauche (G, ∇) définie dans un groupe de Lie quelconque G. La condition nécessaire et suffisante à l'extension de (G, ∇) est la nullité de certaines classes de cohomologie. Le §II est consacré à la description des espaces de cohomologie où habitent les obstructions dont on vient de parler.

II. Certains espaces de cohomologie attachés aux KV-structures

Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie munie d'une KV-structure. Soit l'espace vectoriel dual de l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathfrak{G}$. Conformément aux notations antérieures on désigne par $\rho(X)$ la multiplication à gauche par $X \in \mathfrak{G}$. Soit ρ^* la représentation duale de ρ. On identifiera le produit tensoriel $\bigwedge^l \mathfrak{G}^* \otimes \mathfrak{G}$ avec l'espace des applications l-linéaire alternées de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{G}$. La représentation linéaire duale ρ^* est définie en posant pour tout $(X, \theta) \in \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}^*$: $\rho^*(X)\theta = -\theta \circ \rho(X)$. Le produit tensoriel $\rho \otimes \rho^*$ définit une représentation linéaire de $\mathfrak{G}$ dans $\mathrm{End}(\mathfrak{G})$ qui sera notée $\hat{\rho}$. Soit $(X, A) \in \mathfrak{G} \times \mathrm{End}(\mathfrak{G})$ on vérifie aisément la relation

$$\hat{\rho}(X) \cdot A = (\rho \otimes \rho^*)(X)A = [\rho(X), A].$$

2.1. Complexe de Chevalley-Eilenberg. Dans la suite interviennent des espaces de cohomologie des complexes de Chevalley-Eilenberg attachés aux représentations linéaires ρ, ρ^* et $\hat{\rho}$ respectivement. D'une façon générale soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie et soit r une représentation linéaire de $\mathfrak{G}$ dans un espace vectoriel V. On associe à r le complexe de cochaines $C_r(\mathfrak{G}, V)$ dont l'espace des p-cochaines, $C_r^p(\mathfrak{G}, V)$ est le produit tensoriel $\bigwedge^p \mathfrak{G}^* \otimes V$ et dont l'opérateur différentiel est l'application d_r de $C_r^p(\mathfrak{G}, V)$ dans $C_r^{p+1}(\mathfrak{G}, V)$ qui associé à $f \in C_r^p(\mathfrak{G}, V)$ l'élément $d_r f$ défini par la formule suivante:

$$\begin{aligned}(d_r f)(X_0, \cdots, X_p) = {} & \sum_{i=0} (-1)^i r(X_i) f(X_0, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_p) \\ & + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f([X_i, X_j], X_0, \cdots, \hat{X}_i \cdots \hat{X}_j \cdots X_p).\end{aligned}$$

Le symbole $\hat{X}$ signifie l'omission de l'argument X_i. On a visiblement $d_r \circ d_r = 0$. L'espace des p-cocycles est le noyau $Z^p(\mathfrak{G}, V)$ de d_r: $C_r^p(\mathfrak{G}f, V) \to C_r^{p+1}(\mathfrak{G}, V)$ et l'espace de p-cobords est l'image $B^p(\mathfrak{G}, V)$ de d_r: $C_r^{p-1}(\mathfrak{G}, V) \to C_r^p(\mathfrak{G}, V)$. Les cobords $df \in B^p('gG, V)$ sont des cocycles exacts; on dira qu'une $(p-1)$-cochaine f est une primitive du p-cocycle exact $u \in Z^p(\mathfrak{G}, V)$ si $d_r f = u$. On a la relation d'inclusion $B^p(\mathfrak{G}, V) \subset Z^p(\mathfrak{G}, V)$. Le $p^{i\,\text{ème}}$ espace de cohomologie de $\mathfrak{G}$ à coefficients dans V est l'espace vectoriel quotient $H^p(\mathfrak{G}, V) = Z^p(\mathfrak{G}, V)/B^p(\mathfrak{G}, V)$. Lorsqu'il y aura plusieurs représentations linéaires de la même algèbre de Lie on évitera les confusions en indexant les espaces de cohomologie par les représentations qui les définissent. On fera deux exceptions à cete convention. (i) Lorsque V est le corps des nombres réels et que r est la représentation triviale, l'espace de cohomologie sera noté $H^*(\mathfrak{G}, \mathbb{R})$; c'est l'algèbre de cohomologie scolaire de [9]. (ii) Si $V = \mathfrak{G}$ et si r est la représentation adjointe $r(X) \cdot Y = [X, Y]$, l'espace de cohomologie sera noté $H^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ au lieu de $H_{\mathrm{ad}}(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$. Si r est une représentation linéaire de $\mathfrak{G}$ dans lui-même autre que la représentation adjointe on notera $H_r^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$, $H_r^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*)$ et $H_r^*(\mathfrak{G}, \mathrm{End}(\mathfrak{G}))$ les espaces de cohomologie des complexes de Chevalley-Eilenberg attachés à r, r^* et $\hat{r}$ respectivement.

2.2. Complexe de Koszul-Spencer ([10], [23]). Soient V et W des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps commutatif de caractéristique nulle. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on désigne par $S^p V^*$ le sous-espace homogène de degré p de l'algèbre symétrique de V^*. Soit $\mathfrak{G}$ un sous-espace vectoriel de $V^* \otimes W$; on définit par récurrence sur $p \in N$ le prolongement d'ordre p de $\mathfrak{G}$ en posant:

$$\mathfrak{G}^0 = \mathfrak{G}; \qquad \mathfrak{G}^{p+1} = V^* \otimes \mathfrak{G}^p \cap S^{p+1} V^* \otimes W.$$

L'espace vectoriel $\mathfrak{G}^{p+1}$ est donc un sous-espace des applications linéaires de V dans $\mathfrak{G}^p$. Soit $v \in V$, on associe à v l'application évaluation:

$$e_v : \mathfrak{G}^{p+1} \to \mathfrak{G}^p.$$

Le complexe de Koszul-Spencer de $\mathfrak{G}$ est le complexe bigradué par les sous-espaces vectoriels $\mathrm{KS}^{p,q}$ définis de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{KS}^{p,q}(\mathfrak{G}) = 0 && \text{si } p < 0 \text{ et } q < -1,\\
&\mathrm{KS}^{p,q}(\mathfrak{G}) = \bigwedge^p V^* \otimes W && \text{si } p \geq 0 \text{ et } q = -1,\\
&\mathrm{KS}^{p,q}(\mathfrak{G}) = \bigwedge^p V^* \otimes \mathfrak{G}^q && \text{si } p \geq 0 \text{ et } q \geq 0.
\end{aligned}$$

L'opérateur différentiel $\partial : \mathrm{KS}^{p,q+1}(\mathfrak{G}) \to \mathrm{KS}^{p+1,q}(\mathfrak{G})$ est défini par la formule suivante: soit f dans $\mathrm{KS}^{p,q+1}(\mathfrak{G})$ et soit $(v_1, \cdots, v_{p+1})$ dans $\bigwedge^{p+1} V$, on a

$$\partial f(v_1, \cdots, v_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i e_{v_i} f(v_1, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_{p+1}).$$

On vérifie directement que $\partial^2 = 0$. On note $H^{p,q}(\mathfrak{G})$ l'espace de cohomologie en $\mathrm{KS}^{p,q}(\mathfrak{G})$ de la suite suivante

$$\xrightarrow{\partial} \mathrm{KS}^{p-1,q+1}(\mathfrak{G}) \xrightarrow{\partial} \mathrm{KS}^{p,q}(\mathfrak{G}) \xrightarrow{\partial} \mathrm{KS}^{p+1,q-1}(\mathfrak{G}) \xrightarrow{\partial}.$$

Pour chaque couple $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la suite ci-dessus est bornée à droite par le terme $\bigwedge^{p+q-1} V^* \otimes W$. On va voir que le complexe de Koszul-

Spencer permet d'établir un lien entre les divers espaces de cohomologie associé à une KV-structure.

Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie munie d'une KV-structure $(\mathfrak{G}, \rho)$. Pour chaque $q \in \mathbb{N}$ on va pour $\mathfrak{G}^{*q} = S^{q+1}\mathfrak{G}^*$. On munira chaque $\mathfrak{G}^{*q}$ de la structure de $\mathfrak{G}$-module définie par la puissance tensorielle $\bigotimes^q \rho^*$ de ρ^*. On peut associer à chaque $q \in \mathbb{N}$ le complexe de Chevalley-Eilenberg $C^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^{*q})$. L'espace des p-cochaines de $C^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^{*q})$ est $\bigwedge^p \mathfrak{G}^* \otimes \mathfrak{G}^{*q}$, qui n'est pas autre chose que l'espace des (p, q)-cochaines du complexe de Koszul-Spencer $\mathrm{KS}(\mathfrak{G}^*)$. On a donc pour chaque couple $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le carré (non commutatif!) suivant:

$$\begin{array}{ccc}
C^{p-1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^{*q+1}) & \xrightarrow{\partial} & C^p(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^{*q}) \\
{\scriptstyle d_\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_\rho} \\
C^p(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^{*q+1}) & \xrightarrow{\partial} & C^{p+1}(\mathfrak{G}, \mathbb{G}^{*q})
\end{array}$$

Ce carré est commutatif au signe près; cela veut dire que pour f dans $C^{p+1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^{*q+1})$ on a:

$$d_\rho(\partial f) = \varepsilon_{pq}\partial(d_\rho f)$$

où $\varepsilon_{pq} = \pm 1$ dépend des parités de p et de q. D'une façon générale si on note δ l'opérateur differentiel du complexe scalaire $C^*(\mathfrak{G}, \mathbb{R})$ le diagramme des complexes ci-dessous commute au signé près:

$$\begin{array}{ccccccc}
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
C^{p-1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^{*q+1}) & \xrightarrow{\partial} & C^p(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^{*q}) & \xrightarrow{\partial} \cdots & \longrightarrow & & \bigwedge^{p+q}\mathfrak{G}^* \longrightarrow 0 \\
{\scriptstyle d_\rho}\downarrow & & {\scriptstyle d_\rho}\downarrow & & & & {\scriptstyle \delta}\downarrow \\
C^p(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^{*q+1}) & \xrightarrow{\partial} & C^{p+1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^{*q}) & \xrightarrow{\partial} \cdots & \longrightarrow & & \bigwedge^{p+q}\mathfrak{G}^* \longrightarrow 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow
\end{array}$$

Dans ce diagramme les suites horizontales sont les suites de Koszul-Spencer, les suites verticales sont les suites de Chevalley-Eilenberg associées aux puissances tensorielles de ρ^*; la suite verticale bordante à droite est le complexe des cochaines scalaires de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ [14]. Par un argument classique on montre que le complexe $\mathrm{KV}(\mathfrak{G}^*)$ est acyclique ([10], [23]); l'opérateur différentiel ∂ induit une application linéaire ∂^* de $H^p_\rho(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*)$ dans $H^{p+1}(\mathfrak{G}, \mathbb{R})$. On sait que le problème de relèvement de $(\mathfrak{G}, \rho)$ dans des extensions centrales de codimension 1 de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ se ramène à l'étude de l'application linéaire $\partial^1 : H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*) \to$

$H^2(\mathfrak{G}, \mathbb{R})$ [5]. Une KV-structure $(\mathfrak{G}, \rho)$ a la propriété de relèvement si et seulement si $\partial^1 H^1_\rho(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*) = H^2(\mathfrak{G}, \mathbb{R})$. Quant au problème d'extension il se traduit de façon naturelle en terme de relation entre $H^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ et $H^*_\rho(\mathfrak{G}, \mathrm{End}(\mathfrak{G}))$, d'une part et entre $H^*_\rho(\mathfrak{G}, \mathrm{End}(\mathfrak{G}))$ et $H^*_\rho(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ d'autre part. Soit en fait $(\mathfrak{G}, \rho)$ une KV-structure; nous allons interpréter ρ comme un $\mathfrak{G}$-homomorphisme de la représentation adjointe dans la représentation linéaire $\hat{\rho}$; i.e., on a pour (X, Y) dans $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$

$$\rho(\mathrm{ad}_x Y) = \hat{\rho}(X) \cdot \rho(Y).$$

L'homomorphisme ρ induit un homomorphisme du complexe des cochaines $(C^p(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}))_p$ dans le complexe des cochaines $(C^p_\rho(\mathfrak{G}, \mathrm{End}(\mathfrak{G})))_p$. On note alors $\rho^p\colon H^p(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) \to H^p_{\hat{\rho}}(\mathfrak{G}, \mathrm{End}(\mathfrak{G}))$ l'application linéaire dérivée de ρ. Le problème d'extension de ρ se ramène à l'étude de l'application linéaire $\rho^1\colon H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) \to H^1_\rho(\mathfrak{G}, \mathrm{End}(\mathfrak{G}))$ ([4], [5]). La suite est consacrée à l'étude de cette application ρ^1.

2.3. Effacement des classes de cohomologie. L'objectif de ce numéro 2.3 est d'introduire la notion d'effacement des classes de cohomologie des groupes à coefficients dans des modules.

Soit G un groupe abstrait; soit V un espace vectoriel sur un corps commutatif de caractéristique nulle. On suppose que V est équipé d'une structure de G-module et on désigne par $C^p(G, V)$ l'espace vectoriel des p-cochaines à coefficients dans V. Soit d l'opérateur différentiel qui envoie $C^p(G, V)$ dans $C^{p+1}(G, V)$ suivant la formule suivante

$$df(g_0, \cdots, g_p) = g_0 \cdot f(g_1, \cdots, g_p) - \sum_{i=0}^{p}(-1)^i f(, \cdots, g_i g_{i+1}, \cdots, g_p) + (-1)^{p+1} f(g_0, \cdots, g_{p-1}).$$

On désigne par $H^p(G, V)$ l'espace de cohomologie en $C^p(G, V)$ du complexe ainsi défini.

Soit W un autre G-module; un application linéaire φ de V dans W est un G-homomorphisme si φ est G-équivariant (on dit aussi que φ est un invariant du G-module $\mathrm{Hom}(V, W)$). Tout G-homomorphisme φ de V dans W induit un homomorphisme du complexe $C^*(G, V)$ dans le complexe $C^*(G, W)$ dont l'homomorphisme dérivé est noté φ^* : $H^*(G, V) \to H^*(G, W)$, φ^* est une application linéaire de degré zéro.

Definition. Soit G un groupe abstrait; une classe de cohomologie $[\theta]$ de G à coefficients dans un G-module V est dite effaçable s'il existe un G-module W et un G-homomorphisme injectif φ de V dans W tel que $\varphi^*[\theta] = 0$.

Nous ferons plus loin usage d'une variante du théorème suivant.

Théorème (*d'effacement*) **2.3.1** (*Hochschild-Iwasawa*). *Si G est un groupe résoluble alors toute classe de cohomologie de G à coefficients dans un G-module est effaçable.*

Soit G un groupe de Lie, supposons que V soit un G-module continu, cela veut dire que la structure de G-module est définie par un homomorphisme continu Θ de G dans $\mathrm{GL}(V)$. On désigne alors par $\Omega^p(G, V)$ l'espace des p-formes équivariantes définies dans G à valeurs dans V. En fait l'action de G dans lui-même par les translations à gauche se relève en une action de G dans $\bigwedge^* TG$ où $\bigwedge^p TG$ est le fibré des tenseurs antisymétriques de type $(p, 0)$ (i.e., p fois covariant). On considère le fibré vectoriel trivial $G \times V$ de base G. Puisque V est un G-module, les translations à gauche induisent une action de G dans $G \times V$; alors $\Omega^p_g(G, V)$ n'est pas autre chose que l'ensemble des applications linéaires G-équivariantes de $\bigwedge^p T_g G$ dans la fibre $\{g\}\times V$ de $G\times V$. Soit $\mathfrak{G}$ l'algèbre de Lie de G, un élément $\alpha \in \Omega^p(G, V)$ est déterminé par la donnée de $\alpha|_{\wedge^p \mathfrak{G}}$ et réciproquement; autrement dit $\Omega^\#(G, V)$ est déterminé par $\Omega^\#_e(G, V)$.

Soit θ la différentielle en l'élément neutre $e \in G$ de Θ; alors $\Omega^\#(G, V)$ est cohomologiquement équivalent au complexe de Chevalley-Eilenberg $C^*_\theta(\mathfrak{G}, V)$. L'application de la notion d'effacement rappelée ci-dessus se fera pour les classes de complexe analogue à $\Omega^\#(G, V)$. Une utilisation efficace des outils de ce §II nécessite des présentations particulières des groupes de Lie nilpotents. Le §III est consacré à ces présentations.

III. Présentations des algèbres de Lie nilpotentes et problème d'extension

3.1. Présentation des algèbres de Lie nilpotentes. Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension $n+1$, $n > 0$. On va rappeler les présentations de $\mathfrak{G}$ qui sont utilisées dans la suite (voir aussi [5]). Soit $\mathfrak{G}_0$ une sous-algèbre de Lie de dimension n dans $\mathfrak{G}$. On identifie $\mathfrak{G}$ avec le produit d'espace vectoriels $\mathfrak{G}_0 \times \mathbb{R}$. La structure de crochet de $\mathfrak{G}$ est alors définie par la donnée d'une dérivation nilpotente D de $\mathfrak{G}_0$ telle que pour tout $((X, x), (Y, y))$ dans $(\mathfrak{G}_0 \times \mathbb{R}) \times (g_0 \times \mathbb{R}) \simeq \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ on a

$$(\mathrm{r}_1) \qquad [(X, x), (Y, y)] = ([X, Y] + D(xY - yX), 0).$$

Dans la suite on écrira $\mathfrak{G} = (\mathfrak{G}_0, D)$ pour signifier que l'espace vectoriel $\mathfrak{G}$ est le produit $\mathfrak{G}_0 \times \mathbb{R}$ et que le crochet de $\mathfrak{G}$ est donné par la formule (r_1).

Considérons maintenant un idéal de dimension 1 dans $\mathfrak{G}$ et notons $\mathfrak{A}$ l'algèbre de Lie quotient de $\mathfrak{G}$ par cet idéal. L'espace vectoriel $\mathfrak{G}$ s'identifie canoniquement avec l'espace produit $\mathbb{R} \times \mathfrak{A}$. La loi de crochet dans $\mathfrak{G}$ est déterminée par la donnée d'un 2-cocycle scalaire $\Omega \in Z^2(\mathfrak{A}, \mathbb{R})$; le crochet dans $\mathfrak{G} \simeq \mathbb{R} \times \mathfrak{A}$ est alors donnée par la formule suivante

$$(\mathrm{r}_2) \qquad [(x, X); (y, Y)] = (\Omega(X, Y), [X, Y]).$$

On écrira $\mathfrak{G} = (\Omega, \mathfrak{A})$ pour signifier que le crochet dans $\mathfrak{G}$ est déterminé par le cocycle Ω suivant la formule (r_2).

Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension $n+2$, $n > 0$. Il existe un triplet $(\Omega, \mathfrak{A}, D)$ formé d'une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{A}$ de dimension n, d'un 2-cocycle scalaire $\Omega \in Z^2(\mathfrak{A}, \mathbb{R})$ et d'une dérivation nilpotente D de l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}$, ces données étant liées par les conditions suivantes:

(i) La 2-cocycle $D\Omega(X, Y) = -\Omega(DX, Y) - \Omega(X, DY)$ est cohomologue à zéro; autrement dit il existe une 1-cochaine scalaire α telle que $D\Omega = \delta\alpha$.

(ii) Conformément aux présentations (r_1) et (r_2) il existe une injection canonique de $(\Omega, \mathfrak{A})$ dans $\mathfrak{G}$ et une projection canonique de $\mathfrak{G}$ dans $(\mathfrak{A}, D)$ qui rendent commutatif le diagramme suivant:

$$(\mathrm{r}_3) \qquad \begin{array}{ccc} (\Omega, \mathfrak{A}) & \longrightarrow & \mathfrak{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{A} & \longrightarrow & (\mathfrak{A}, D) \end{array}$$

Remarque 3.1.1. Les données étant celles ci-dessus, les assertions suivantes sont équivalentes (i) $D\Omega \sim 0$ (cohomologue à zéro), (ii) il existe un 2-cocycle scalaire $\hat{\Omega} \in Z^2((\mathfrak{A}, D), \mathbb{R})$ tel que $\Omega = \hat{\Omega}|_{\mathfrak{A}}$; (iii) il existe une dérivation nilpotente $\widetilde{D}$ de $(\Omega, \mathfrak{A})$ telle que $\mathfrak{G} = ((\Omega, \mathfrak{A}), \widetilde{D})$. Le plus souvent on écrira $\mathfrak{A}_\Omega$ pour $(\Omega, \mathfrak{A})$ et $\mathfrak{A}_D$ pour $(\mathfrak{A}, D)$. La présentation $\mathfrak{G} = (\Omega, \mathfrak{A}, D)$ signifiera que l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ est déterminée par le triplet $(\Omega, \mathfrak{A}, D)$ suivant le diagramme (r_3).

Remarque 3.1.2. Les présentations $(\mathfrak{A}, D)$ et $(\Omega, \mathfrak{A})$ peut être remplacées par $(\mathfrak{A}, D')$ et $(\Omega', \mathfrak{A})$ respectivement si $[\Omega] = [\Omega'] \in H^2(\mathfrak{A}, \mathbb{R})$ et si $[D] = [D'] \in H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$. Autrement dit si $[D] = [D']$ et $[\Omega] = [\Omega']$ les algèbres de Lie $\mathfrak{A}_D$ et $\mathfrak{A}_{D'}$ (resp. $\mathfrak{A}_\Omega$ et $\mathfrak{A}_{\Omega'}$) sont canoniquement isomorphes; cette observation sera utilisée implicitement dans la suite.

3.2. Problème d'extension des KV-structures. Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie (nilpotente ou non) de dimension n munie d'une KV-structure $(\mathfrak{G}, \rho)$. Soit D une dérivation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$.

Conformément aux notations du numéro 3.1 soit $\mathfrak{G}_D$ l'algèbre de Lie de dimension $n+1$ déterminée par le couple $(\mathfrak{G}, D)$.

Problème d'extension. Existe-t-il dans $\mathfrak{G}_D$ une KV-structure $(\mathfrak{G}_D, \rho_D)$ telle que l'homomorphisme inclusion $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_D$ soit un homomorphisme de KV-structure ?

Lorsqu'il existe une KV-structure $(\mathfrak{G}_D, \rho_D)$ satisfaisant à la condition requise on dit que $(\mathfrak{G}, \rho)$ a la propriètè de D-extension.

Exemple 3.2.1. Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie commutative de dimension n, munie de sa KV-structure triviale $(\mathfrak{G}, \sigma)$; i.e., $\sigma(X) \cdot Y \equiv 0$. Quelle que soit la dérivation D de $\mathfrak{G}$ $(\mathfrak{G}, \sigma)$ a la propriété de D-extension; il suffit pour cela de définir $(\mathfrak{G}_D, \sigma_D)$ en posant

$$\sigma_D(X, x) \cdot (Y, y) = (xDY, 0).$$

Example 3.2.2. Soit $\mathfrak{H}_3$ l'algèbre de Heisenberg. On fixe une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathfrak{H}_3$ telle que $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_1, e_2] = [e_1, e_3] = 0$. On munit $\mathfrak{H}_3$ de la KV-structure:

$$\rho(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3) = (x_2y_3, 0, 0).$$

Soit D la dérivation de $\mathfrak{H}_3$ définie par:

$$D(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_3, 0).$$

La KV-structure ci-dessus n'a pas la propriété de D-extension.

3.3. Obstructions à l'extension d'une KV-structure. Soit $(\mathfrak{G}, \rho)$ une KV-structure définie dans une algèbre de Lie quelconque $\mathfrak{G}$. L'obstruction à l'extension de $(\mathfrak{G}, \rho)$ dans une extension $\mathfrak{G}_D$ est une séquence de classes de cohomologie (non indépendantes) définies dans $H^1_\rho(\mathfrak{G}, \mathrm{End}(\mathfrak{G}))$ et dans $H^1_\rho(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ respectivement. Soit $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ l'algèbre de Lie des dérivations extérieures de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$. On a déjà observé que ρ induit une application linéaire ρ^1 de $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ dans $H^1_\rho(\mathfrak{G}, \mathrm{End}(\mathfrak{G}))$. Notons $\mathrm{Der}(\mathfrak{G})$ l'algèbre de Lie de toutes les dérivations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$. On a le lemme suivant.

Lemma 3.3.1. *Soit $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{G})$, pour que ρ ait la propriété de D-extension il faut que la classe $\rho^1[D] \in H^1_\rho(\mathfrak{G}, \mathrm{End}(\mathfrak{G}))$ soit nulle.*

Preuve. Supposons qu'il existe une D-extension $(\mathfrak{G}_D, \rho_D)$ de $(\mathfrak{G}, \rho)$. On identifie $\mathfrak{G}_0$ avec le produit $\mathfrak{G} \times \mathbb{R}$, de sorte qu l'on a pour tout X dans $\mathfrak{G}$ $[(0, 1), (X, 0)] = (DX, 0)$. Soient X et Y dans $\mathfrak{G}$, on a

$$\begin{aligned}\rho_D(0, 1)\rho_D(X, 0) \cdot (Y, 0) - \rho(\rho_D(0, 1) \cdot (X, 0))(Y, 0) \\ = \rho(X)\rho_D(0, 1)(Y, 0) - \rho(\rho_D(X, 0) \cdot (0, 1))Y.\end{aligned}$$

Ce qui donne la condition suivante:

$$[\rho_D(0, 1)|_{\mathfrak{G}}, \rho(X)] = \rho(DX).$$

Cela prouve que la classe de cohomologie $\rho^1[D]$ est nulle. Lorsque la première obstruction $\rho^1[D]$ est nulle la seconde habite l'espace de cohomologie $H^1_\rho(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$.

Lemma 3.3.2. *Les notations étant celles qui précèdent on suppose que* $\rho^1([D]) = 0$. *Soit* $-A \in \mathrm{End}(\mathfrak{G})$ *une primitive de* $\rho^1(D)$, *i.e.,* $[A, \rho(X)] = \rho(DX)$, $X \in \mathfrak{G}$*; alors on a* $d_\rho(A^2 + D^2 - 2AD) = 0$.

Preuve. Il s'agit de vérifier que pour tout couple (X, Y) d'éléments de $\mathfrak{G}$ on a

$$\begin{aligned}0 = \rho(X)(A^2 + D^2 - 2AD)\cdot Y - \rho(Y)(A^2 + D^2 - 2AD)\cdot X \\ - (A^2 + D^2 - ZAD)[X, Y].\end{aligned}$$

Cela découle immédiatement des relations $[A, \rho(X)] = \rho(DX)$ et $D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY]$.

En combinant le Lemma 3.3.1 et le Lemma 3.3.2 on a la condition nécessaire et suffisante pour la D-extension de $(\mathfrak{G}, \rho)$ dans $\mathfrak{G}_n$. Nous pouvons enoncer ces conditions sous la forme suivante:

Théorème 3.3.1 [3]. *Soit* $(\mathfrak{G}, \rho)$ *une KV-structure. Pour toute dérivation* $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{G})$ *les assertions suivante sont équivalentes.*

(i) *Il existe une D-extension* $(\mathfrak{G}_D, \rho_D)$ *de* ρ *dans* $\mathfrak{G}_0$.

(ii) *Il existe un couple* $(A_D, U_D) \in \mathrm{End}(\mathfrak{G}) \times \mathfrak{G}$ *qui vérifie les conditions suivantes*: (a) $[A, \rho(X)] = \rho(DX)$, $X \in \mathfrak{G}$; (b) $(A^2 + D^2 - 2AD)X = \rho(X)U_D$, $X \in \mathfrak{G}$.

Lorsqu'il existe un couple (A_D, U_D) satisfaisant la condition (ii) du Théorème 3.3.1 la D-extension ρ_D associée à (A_D, U_D) est définie par la formule suivante: soient (X, x) et (Y, y) des éléments de $\mathfrak{G} \times \mathbb{R} \simeq \mathfrak{G}_D$, on pose

$$\rho_D(X, x)\cdot(Y, y) = ((\rho(X) + xA_D)Y + y((A_D - D)X + xU_D), 0).$$

Dans [4] on a montré que les KV-structures normales des groupes nilpotents ont la propriété de relèvement dans des extensions centrales de codimension 1. Dans ce travail on va décrire et établir l'existence d'une classe de KV-structures normales qui possèdent d'excellentes propriétés d'extension.

Disons quelques mots pour terminer ce numéro du problème de relèvement des structures affines. Soit G un groupe de Lie quelconque muni d'une structure affine (G, ∇). Soit $\Gamma \times G$ une extension centrale de G

par un groupe de Lie Γ de dimension 1. Le problème de relèvement consiste comme déjà vu à la recherche dans $\Gamma \times G$ d'une structure affine qui rend affine l'homomorphisme canonique de $\Gamma \times G$ sur G. On observe que si (G, ∇) est complète alors tout relèvement de (G, ∇) dans $\Gamma \times G$ qui induit la structure affine triviale de Γ sera aussi complète.

Si $\mathfrak{G}$ est l'algèbre de Lie de G, l'algèbre de Lie de $\Gamma \times G$ est déterminée par un cocycle scalaire $\Omega \in Z^2(G, \mathbb{R})$. Autrement dit l'algèbre de Lie de $\Gamma \times G$ a une présentation (r_2). Soit $(\mathfrak{G}, \rho)$ la KV-structure associée à (G, ∇) et soit ∂^1 l'homomorphisme de $H^1_\rho(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*)$ dans $H^2(G, \mathbb{R})$ décrit au §2.2 ci-dessus. Soit H^2_ρ l'espace quotient de $H^2(G, \mathbb{R})$ par $\partial^1(H^1_\rho(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*))$; désignons par $[\Omega]_\rho$ l'image de la classe $[\Omega] \in H^2(G, \mathbb{R})$ dans H^2_ρ ; on a alors

Théorème 3.3.2 (*Théorème de relèvement*). *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a_1) $[\Omega]_\rho = 0$,

(a_2) (G, ∇) *a la propriété de relèvement dans* $\Gamma \times G$.

Démonstration. Supposons que l'on ait $[\Omega]_\rho = 0$; il existe alors un cocycle $\Phi \in Z^1_\rho(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*)$ qui vérifie la condition suivante $\partial\Phi = \Omega$; en d'autres termes si on pose $\Phi(X, Y) = \langle\Phi(X), Y\rangle$ on a pour X, Y, Z dans $\mathfrak{G}$

$$\Phi(X, Y) - \Phi(Y, X) = \Omega(X, Y),$$

$$\Phi(X, \rho(Y)Z) - \Phi(Y, \rho(X)Z) - \Phi([X, Y], Z) = 0.$$

On munit alors $\mathbb{R} \times \mathfrak{G}$ de la multiplication suivante

$$\widetilde{X} \cdot \widetilde{Y} = (x, X) \cdot (y, Y) = (\Phi(X, Y), \rho(X)Y).$$

On pose $\rho_\Omega(x, X) \cdot (y, Y) = (x, X) \cdot (y, Y)$; le couple $(\mathbb{R} \times \mathfrak{G}, \rho_\Omega)$ détermine dans $\Gamma \times G$ une structure affine ayant les propriétés requises. On a donc $(\mathrm{a}_1) \Rightarrow (\mathrm{a}_2)$.

Supposons maintenant qu'il existe dans $\mathbb{R} \times \mathfrak{G}$ une KV-structure $(\mathbb{R} \times \mathfrak{G}, \rho')$ qui induit la structure triviale dans $\mathbb{R} \times \{0\}$ et set projette en $(\mathfrak{G}, \rho)$. Il existe alors une forme bilinéaire Φ définie dans $\mathfrak{G}$ telle que l'on ait

$$\rho'(x, X)(y, Y) = (\Phi(X, Y), \rho(X)Y).$$

Notons encore Φ l'application $X \to \phi(X, -)$ de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{G}^*$. On a $\partial\Phi = \Omega$ et $d_\rho\Phi = 0$. Cela prove que $(\mathrm{a}_2) \Rightarrow (\mathrm{a}_1)$.

3.4. KV-structures homotopies à zéro. Soit $(\mathfrak{G}, \rho)$ une KV-structure; soit $\mathscr{D}(\mathfrak{G})$ une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{G}$.

Définition 3.4.1. On dira que la KV-structure $(\mathfrak{G}, \rho)$ est $\mathscr{D}(\mathfrak{G})$-homotope à zéro ($\rho \sim_{\mathscr{D}(\mathfrak{G})} 0$) si l'image de $\mathscr{D}(\mathfrak{G})$ par ρ^1 est le sous-espace nul dans $H^1_\rho(\mathfrak{G}, \mathrm{End}(\mathfrak{G}))$.

Exemple 3.4.1. La KV-structure triviale de toute algèbre de Lie commutative $\mathfrak{G}$ est $\mathrm{Der}(\mathfrak{G})$-homotope à zéro.

3.4.2. Soit $\mathfrak{H}_3$ l'algèbre de Heisenberg de dimension 3. Soit (e_1, e_2, e_3) une basse de $\mathfrak{H}_3$ telle que $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_1, e_2] = 0$, $[e_1, e_3] = 0$. Soit ρ la KV-structure de $\mathfrak{H}_3$ définie par la formule suivante:

$$\rho(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3) = \tfrac{1}{2}(x_2 y_3 - x_3 y_2), 0, 0).$$

Soit $\mathscr{D}^0_F(\mathfrak{H}_3)$ le sous-espace de $\mathrm{End}(\mathfrak{H}_3)$ constitué des éléments dont les matrices dans la base (e_1, e_2, e_3) sont de la forme:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$\mathfrak{D}^0_F(\mathfrak{H}_3)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{Der}(\mathfrak{H}_3)$. La KV-structure définite ci-dessus est $\mathfrak{D}^0_F(\mathfrak{H}_3)$-homotope à zéro. En effet soit D un élément de $\mathfrak{D}^0_F(\mathfrak{H}_3)$; on associe à D l'endomorphisme A_D dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est

$$A_D = \begin{bmatrix} 0 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a $[A_D, \rho(X)] = \rho(DX)$ pour tout X dans $\mathfrak{H}_3$.

Remarque 3.4.1. On sait que ρ induit un homomorphisme du complexe

$$\to C^p(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) \to C^{p+1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) \to$$

dans le complexe

$$\to C^p_\rho(\mathfrak{G}, \mathrm{End}(\mathfrak{G})) \to C^{p+1}_\rho(\mathfrak{G}, \mathrm{End}(\mathfrak{G})) \to .$$

Dire que ρ est $\mathrm{Der}(\mathfrak{G})$-homotope à zéro signifie (qu'au moins au niveau $p = 1$) ρ^* est homotope à zéro au sens de l'algèbre homologique.

IV. KV-structures normales de type central

4.1. Dans tout ce paragraphe les algèbres de Lie considérées sont nilpotentes. Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie nilpotente et soit D une dérivation nilpotente de $\mathfrak{G}$. Il existe un drapeau normal de type central

$$F(\mathfrak{G}) = 0 \subset \mathfrak{G}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{G}_k \subset \cdots \subset \mathfrak{G},$$

qui vérifie la condition $D(\mathfrak{G}_k) \subset \mathfrak{G}_k$ pour tout k. En effet D préserve la suite centrale descendante. On considère l'algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{G}_D$; elle possède un drapeau normal de type central $F(\mathfrak{G}_D)$ qui induit dans $\mathfrak{G}$ un drapeau normal de type central.

Définition 4.1.1. Soit $(\mathfrak{G}, \rho)$ une KV-structure. On dira que $(\mathfrak{G}, \rho)$ est normal de type central si les conditions suivantes sont vérifiées:

(i) ρ préserve un drapeau normal de type central $F(\mathfrak{G})$.

(ii) Pour tout couple d'entiers naturels (l, k) avec $0 \leq k \leq l$ on a $[\mathfrak{G}_l, \mathfrak{G}_k] = \rho(\mathfrak{G}_l)\mathfrak{G}_k$.

Exemple 4.1.1. La KV-structure normale triviale de toute algèbre de Lie commutative $\mathfrak{G}$ est de type central.

Exemple 4.1.2. La KV-structure $(\mathfrak{H}_3, \rho)$ de l'Exemple 3.4.2 est normale de type central.

On observe que les KV-structures normales de type central sont complètes.

4.2. Propriétés $\mathscr{P}_F$ des KV-structures. Sauf mention expresse du contraire les KV-structures dont il sera question dans ce numéro sont normales de type central. Il existe une action naturelle de l'algèbre de Lie $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ dans l'espace vectoriel $H^2(\mathfrak{G}, \mathbb{R})$; soit $([D], [\Omega]) \in H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) \times H^2(\mathfrak{G}, \mathbb{R})$, l'action de $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ dans $H^2(\mathfrak{G}, \mathbb{R})$ est obtenue en posant $[D] \cdot [\Omega] = [D\Omega]$, avec $\Omega \in [\Omega]$, $D \in [D]$; il est évident que la classe $[D\Omega] \in H^2(\mathfrak{G}, \mathbb{R})$ dépend uniquement de $[D]$ et de $[\Omega]$.

Soit $(\mathfrak{G}, \rho)$ une KV-structure normale de type central; soit $F(\mathfrak{G})$ un drapeau normal de type préservé par ρ. Pour la suite on adopte les notations suivantes:

(a) $E_F^0(\mathfrak{G})$ est l'espace vectoriel des endomorphismes nilpotents de l'espace vectoriel $\mathfrak{G}$ qui préservent $F(\mathfrak{G})$.

(b) $\mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G})$ est le sous-espace de $E_F^0(\mathfrak{G})$ constitué des éléments qui sont des dérivations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$.

Propriétés $\mathscr{P}_F$. Les notations sont celles ci-dessus. On dira que la KV-structure $(\mathfrak{G}, \rho)$ a les propriétés $\mathscr{P}_F$ si les condition suivantes sont vérifiées.

(p_1) ρ est $\mathfrak{D}_F^0(\mathfrak{G})$-homotope à zéro.

(p_2) Il existe une application linéaire $D \to (A_D, U_D)$ de $\mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G})$ dans $E_F^0(\mathfrak{G}) \times \mathfrak{G}$ telle que (a) $-A_D$ est une primitive de $\rho^1(D)$, (b) U_D est une primitive de $A_D - D$ relativement au complexe $C_\rho^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$.

(p_3) Soit $\Omega \in \partial^1 Z_\rho^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*)$, il existe $\Phi_\Omega \in \partial^{-1}(\Omega)$ tel que pour tout $D \in \mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G})$ la nullité de $[D\Omega] = [D] \cdot [\Omega]$ entraine la nullité de $[\psi_{\Omega D}] \in$

$H^1_\rho(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*)$ où $X \to \psi_{\Omega D}(X)$ est défini par la formule $\psi_{\Omega D}(X)Y = \Phi_\Omega(DX, Y) + \Phi_\Omega(X, A_D Y)$.

(p_4) Posons $[\mathfrak{D}^0_F(\mathfrak{G})] = \{[D] \in H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) | D \in \mathscr{D}^0_F(\mathfrak{G})\}$. Soient $[D]$ et $[D']$ dans $[\mathscr{D}^0_F(\mathfrak{G})]$ et soit $[\Omega] \in H^2(\mathfrak{G}, \mathbb{R})$ tels que $[D]\cdot[\Omega] = [D'][\Omega] = 0$. On suppose qu'il existe $D \in [D] \cap \mathscr{D}^0_F(\mathfrak{G})$, $D' \in [D'] \cap \mathscr{D}^0_F(\mathfrak{G})$, $\Omega \in [\Omega]$, α et α' dans $\mathfrak{G}^*$ tels que les relations suivantes sont vérifiées

(a) $D\Omega = \delta\alpha$, $D'\Omega = \delta\alpha'$

(b) $D\alpha' - D'\alpha = \Omega^\#(A_D U_{D'} - A_{D'} U_D)$

où $\Omega^\#$ est l'application linéaire $X \to i_X\Omega$ de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{G}^*$. Alors les formes linéaires a_D et $a_{D'}$ qui sont définies par $a_D(X) = \alpha(X) + \Phi_\Omega(X, U_D)$ et $a_{D'}(X) = \alpha'(X) + \Phi_\Omega(X, U_{D'})$ sont liées par la formule

$$A_D a_{D'} - A_{D'} a_D = \Phi_\Omega(A_D U_{D'} - A_{D'} U_D).$$

Commentaire 4.2.1. Chacune des conditions des propriétés $\mathscr{P}_F$ a des significations soit géométriques soit topologiques en rapport étroit avec le problème d'extension des structures affines des groupes de Lie nilpotents; ce premier commentaire a pour but soit d'en donner soit d'en souligner quelques unes.

Signalons pour commencer que si $\mathfrak{G}$ est une algèbre dee Lie de dimension $n+2$ sa structure est déterminée par un quadruplet $(\mathfrak{A}, D_1, D_2, \xi_{12})$ où

(i) $\mathfrak{A}$ est une algèbre de Lie de dimension n,

(ii) D_1 et D_2 sont des dérivations nilpotentes de $\mathfrak{A}$,

(iii) ξ_{12} est un élément de $\mathfrak{A}$ satisfaisant à la condition $[D_1, D_2] = \mathrm{ad}_{\xi_{12}}$,

(iv) en identifiant $\mathfrak{G}$ avec l'espace vectoriel produit $\mathfrak{A} \times \mathbb{R}^2$ la loi de crochet dans $\mathfrak{G}$ est donnée par la formule suivante

$$\begin{aligned}&[(X, x_1, x_2), (Y, y_1, y_2)]\\ &= ([X, Y] + (x_1 D_1 + x_2 D_2)Y - (y_1 D_1 + y_2 D_2)X + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\xi_{12}, 0, 0).\end{aligned}$$

Compte tenu de la présentation (r_1) décrite au §III, on a le diagramme commutatif d'algèbres de Lie:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (\mathfrak{A}, D_2) \arrow[dr] & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur] \arrow[dr] & & (\mathfrak{A}, D_1, D_2, \xi_{12}). \\ & (\mathfrak{A}, D_1) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Supposons maintenant que $\mathfrak{A}$ possède une KV-structure normale complète $(\mathfrak{A}, \rho)$, soit $F(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \cdots \mathfrak{A}$ un drapeau normal préservé par ρ;

soit $\overline{\mathfrak{A}}$ l'algèbre quotient $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_1$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1$ est alors déterminée par le quadruplet $(\overline{\mathfrak{A}}, \overline{D}_1, \overline{D}_2, \bar{\xi}_{12})$. On a alors le cube commutatif d'homomorphismes d'algèbres de Lie:

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathfrak{A}, D_2) \arrow[drr] \arrow[ddd, dashed] & & \\
\mathfrak{A} \arrow[ur] \arrow[drr] \arrow[ddd] & & & (\mathfrak{A}, D_1, D_2, \xi_{12}) \arrow[ddd] \\
 & & (\mathfrak{A}, D_1) \arrow[ur] \arrow[ddd] & \\
 & (\overline{\mathfrak{A}}, \overline{D}_2) \arrow[drr, dashed] & & \\
\overline{\mathfrak{A}} \arrow[ur, dashed] \arrow[drr] & & & (\overline{\mathfrak{A}}, \overline{D}_1, \overline{D}_2, \bar{\xi}_{12}) \\
 & & (\overline{\mathfrak{A}}, \overline{D}_1) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Conformément à la présentation (r_2) on a $\mathfrak{A} = (\overline{\mathfrak{A}}, \Omega)$ avec $\Omega \in Z^2(\overline{\mathfrak{A}}, \mathbb{R})$. La KV-structure $(\mathfrak{A}, \rho)$ se projette en une KV-structure $(\overline{\mathfrak{A}}, \bar{\rho})$ qui est encore normale et complète.

Supposons maintenant que $(\overline{\mathfrak{A}}, \bar{\rho})$ jouisse des propriétés $\mathscr{P}_F(\overline{\mathfrak{A}})$, les conditions (p_1), (p_2), (p_3) et (p_4) ont alors des significations géométriques.

(i) (p_1) et (p_2) assurent que $(\overline{\mathfrak{A}}, \bar{\rho})$ a la propriété d'extension dans $(\overline{\mathfrak{A}}, \overline{D}_1)$ et dans $(\overline{\mathfrak{A}}, \overline{D}_2)$ respectivement. On munira dès lors $(\overline{\mathfrak{A}}, \overline{D}_1)$ (resp. $(\overline{\mathfrak{A}}, \overline{D}_2)$) de l'extension admissible déterminée par le couple $(U_{\bar{D}_1}, A_{\bar{D}_1})$ (resp. $(U_{\bar{D}_2}, A_{\bar{D}_2})$), voir le Théorème 3.3.1.

(ii) Lorsque (p_1) et (p_2) sont vérifiées, la condition (p_3) assure l'existence dans $(\mathfrak{A}, D_1)$ (resp. dans $(\mathfrak{A}, D_2)$) d'une extension de $(\mathfrak{A}, \rho)$ qui se projette dans $(\overline{\mathfrak{A}}, \overline{D}_1)$ (resp. dans $(\overline{\mathfrak{A}}, \overline{D}_2)$) en l'extension admissible $(\overline{\mathfrak{A}}_{\bar{D}_1}, \bar{\rho}_{\bar{D}_1})$ (resp. $(\overline{\mathfrak{A}}_{\bar{D}_2}, \bar{\rho}_{\bar{D}_2})$) décrite dans (i) ci-dessus.

(iii) La condition (p_4) signifie que dès que les extensions admissibles $(\overline{\mathfrak{A}}_{\bar{D}_1}, \bar{\rho}_{\bar{D}_1})$ et $(\overline{\mathfrak{A}}_{\bar{D}_2}, \bar{\rho}_{\bar{D}_2})$) ont une extension admissible commune dans $(\overline{\mathfrak{A}}, \overline{D}_1, \overline{D}_2, \bar{\xi}_{12})$ alors cette dernière possède un relèvement dans $(\mathfrak{A}, D_1, D_2, \xi_{12})$ qui induit dans $(\mathfrak{A}, D_1)$ et dans $(\mathfrak{A}, D_2)$ respectivement les KV-structurers obtenues au (ii) ci-dessus.

Voilà une interprétation géométrique de $\mathscr{P}_F$. Nous verrons au §4.2.E que les propriétés $\mathscr{P}_F$ ont également une signification topologique.

4.2.E. Problème d'extension et problème d'effacement des classes de cohomologie. Dans ce numéro on se propose de montrer que pour certaines familles de structures affines des groupes de Lie nilpotents, le problème d'extension est l'équivalent géométrique de problème d'effacement de certains espaces de cohomologie de groupe à coefficients dans des modules.

Les propriétés $\mathscr{P}_F$ permettent entre autres de rendre ce lien apparent. En fait soit (G, ∇) une structure localement plate invariante à gauche dans un groupe de Lie nilpotent G. Nous supposons que G est connexe et simplement connexe et que (G, ∇) est complète. Soit $(\mathfrak{G}, \rho)$ la KV-structure déterminée par (G, ∇) dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ de G; l'application

$$X \to (X, \rho(X))$$

est un homomorphisme injectif de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{G} \times \mathrm{End}(\mathfrak{G})$ des endomorphismes affines de l'espace vectoriel $\mathfrak{G}$. Soit $(\mathfrak{q}, \mathfrak{f})$ l'homomorphisme continu du groupe de Lie G dans $\mathfrak{G} \times \mathrm{GL}(\mathfrak{G})$ dont la différentielle en l'élément neutre est l'homomorphisme

$$X \to (X, \rho(X)).$$

On équipe maintenant $\mathfrak{G}$ de sa structure de G-module définie par la représentation adjointe et on munit $\mathfrak{G} \times \mathrm{End}(\mathfrak{G})$ de la structure de G-module définie par la relation suivante. Pour $(v, a) \in \mathfrak{G} \times \mathrm{GL}(\mathfrak{G})$ et $g \in G$ on pose

$$(g) \cdot (v, a) = (\mathfrak{q}(g), \mathfrak{f}(g)) \cdot (v, a) \cdot (-\mathfrak{f}(g^{-1})\mathfrak{q}(g), f(g^{-1})).$$

L'application linéaire $\varphi\colon X \to (X, \rho(X))$ devient un G-homomorphisme injectif du G-module $\mathfrak{G}$ dans le G-module $\mathfrak{G} \times \mathrm{End}(\mathfrak{G})$. La cohomologie de G à coefficients dans ce G-module dont il sera question est celle du complexe $\Omega^*(G, \mathfrak{G} \times \mathrm{End}(\mathfrak{G}))$. L'application $\varphi(X) = (X, \rho(X))$ induit l'application linéaire dérivée φ^* de $H^*(G, \mathfrak{G})$ dans $H^*(G, \mathfrak{G} \times \mathrm{End}(\mathfrak{G}))$. Puisque G est connexe on a $H^*(G, \mathfrak{G}) = H^*_{\mathrm{ad}}(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ et $H^*_{\Theta}(G, \mathfrak{G} \times \mathrm{End}(\mathfrak{G})) = H^*_{\mathrm{ad}\circ\varphi}(\mathfrak{G}, \mathfrak{G} \times \mathrm{End}(\mathfrak{G}))$.

Les propriétés $\mathscr{P}_F$ possèdent des significations topologiques que le contexte décrit ci-dessus permet de rendre transparentes. Plus explicitement on a

Théorème 4.2.E$_1$ (théorème d'effacement). *Soit* (G, ∇) *comme ci-dessus; les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a$_1$) $(\mathfrak{G}, \rho)$ *vérifie la condition* (p$_2$) *des propriétés* $\mathscr{P}_F$.

(a$_2$) *Pour tout* $D \in \mathscr{D}^0_F(\mathfrak{G})$ *le G-homomorphisme* $\varphi(X) = (X, \rho(X))$ *efface la classe de cohomologie* $[D] \in H^1_{\mathrm{ad}}(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$.

Démonstration. Le Théorème 4.2.E$_1$ résulte directement du théorème d'extension. En effet supposons que pour tout $D \in \mathscr{D}^0_F(\mathfrak{G})$ il existe $(U_D, A_D) \in \mathfrak{G} \times \mathrm{End}(\mathfrak{G})$ tel que $(A_D - D)(X) = \varphi(X)U_D$ et $[A_D, \varphi(X)] = \varphi(DX)$; ces deux relations équivalent à l'unique relation suivante

$$[(U_D, A_D), (X, \rho(X))] = \varphi(DX)$$

cela signifie que le cocycle $\varphi \circ D \in Z^1_{\mathrm{ad}\circ\varphi}(\mathfrak{G}, \mathfrak{G} \times \mathrm{End}(\mathfrak{G}))$ est cohomologue à zéro. On a donc (p $_2$) $\Rightarrow$ (a $_2$). Réciproquement supposons que pour tout $D \in \mathscr{D}^0_F(\mathfrak{G})$, l'homomorphisme φ efface la classe $[D] \in H^1_{\mathrm{ad}}(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$, alors il existe une application $D \to (U_D, A_D)$ de $\mathscr{D}^0_F(\mathfrak{G})$ dans $\mathfrak{G} \times \mathrm{End}(\mathfrak{G})$ telle que l'on a

$$[(U_D, A_D), (X, \rho(X))] = \varphi(DX)$$

pour tout X dans $\mathfrak{G}$. Cela signifie que $(\mathfrak{G}, \rho)$ vérifie (p $_2$). Le théorème 4.2.E $_1$ est démontré.

Voici une conséquence importante du théorème d'effacement.

Corollaire 4.2.E $_2$. *Les notations sont celles du Théorème* 4.2.E $_1$. *Alors toute structure affine* (G, ∇) *qui vérifie l'assertion* (a $_2$) *du Théorème* 4.2.E $_1$ *a la propriété de* $\mathscr{D}^0_F(\mathfrak{G})$*-extension.*

Preuve. La preuve est constructive. Supposons que (G, ∇) vérifie l'assertion (a $_2$) du Théorème 4.2.E $_1$. Soit $D \in \mathscr{D}^0_F(\mathfrak{G})$, la KV-structure de $\mathfrak{G}_D$ est définie comme il suit. On identifie $\mathfrak{G}_D$ avec l'espace vectoriel $\mathfrak{G} \times \mathbb{R}$. Soit $(U_D, A_D) \in \mathfrak{G} \times \mathrm{End}(\mathfrak{G})$ tel que $\varphi(DX) = [(U_D, A_D), (X, \rho(X))]$ où $(\mathfrak{G}, \rho)$ est la KV-structure déterminée par (G, ∇). On pose

$$\rho_D(X, x)(Y, y) = ((\rho(X) + xA_D)Y + y(\rho(X) + x\,\mathrm{Id}_{\mathfrak{G}})U_0, 0).$$

On obtient ainsi une extension admissible de $(\mathfrak{G}, \rho)$ dans $\mathfrak{G}_D$.

Commentaire 4.2.E $_3$. Le Corollaire 4.2.E $_2$ montre que les structures affines qui vérifient le théorème d'effacement à la Hochschild-Iwasawa-Koszul pour $\mathscr{D}^0_F$ ont la propriété de $\mathscr{D}^0_F$-extension. Soit maintenant G_D un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{G}_D$ et qui contient G comme sous-groupe normal. On munit G_D de la structure affine associée à (U_D, A_D). On se pose la question suivante: la D-extension admissible $(\mathfrak{G}_D, \rho_D)$ fournie par le Corollaire 4.2.E $_2$ vérifie-t-elle de nouveau le théorème d'effacement pour $\mathscr{D}^0_F(\mathfrak{G}_D)$? La réponse à cette question est en général négative, en voici un contre-exemple.

Exemple 4.2.E $_4$. G est le groupe de Heisenberg de dimension 3; $\mathfrak{H}_3$ est l'algèbre de Lie de G. Soient (x_1, x_2, x_3) des coordonnées dans $\mathfrak{H}_3$ dans lesquelles le crochet est donné par la formule

$$[(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)] = (x_2y_3 - x_3y_2, 0, 0).$$

Considérons dans G le sous-groupe connexe H associé à l'idéal $\{(x_1, x_2, 0)\}$. Ce sous-groupe abélien est muni de la structure triviale. Si $\mathfrak{H}$ est l'idéal $\{(x_1, x_2, 0)\}$ la structure de $\mathfrak{H}_3$ est défine par la dérivation de $\mathfrak{H}$ définie par $D(x_1, x_2, 0) = [(0, 0, 1), (x_1, x_2, 0)] = (-x_2, 0, 0)$. Conformément aux notations adoptées l'application $\varphi((x_1, x_2, 0)) =$

$((x_1, x_2, 0), 0)$ de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{H} \times \mathrm{End}(\mathfrak{H})$ efface $[D]$. En effet il suffit de prendre pour (U_D, A_D) le couple $U_D = (0, 1, 0)$, $A_D(x_1, x_2, 0) = (-x_2, 0, 0)$. Il en résulte une extension admissible $\rho_D(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = (-x_3 y_2, x_3, y_3, 0)$. Nous allons montrer que l'extension admissible $(\mathfrak{H}_3, \rho_D)$ ainsi construite ne vérifie pas le théorème d'effacement. Considérons $\Delta \in \mathscr{D}_F^0(\mathfrak{H}_3)$ définie par $\Delta(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_2 + \beta x_3, \gamma x_3, 0)$. Soit $A_\Delta \in \mathrm{End}(\mathfrak{G})$ qui vérifie la condition $[A_\Delta, \rho_D(x_1, x_2, x_3)] = \rho_D(\Delta(x_1, x_2, x_3))$. On a alors nécessairement $A_\Delta(x_1, x_2, x_3) = (v x_3, w x_3, 0)$ avec $(v, w) \in \mathbb{R}^2$. Cherchons maintenant un élément $U_\Delta = (a, b, c) \in \mathfrak{H}_3$ tel que $(A_\Delta - \Delta)(x_1, x_2, x_3) = \rho_D(x_1, x_2, x_3) U_\Delta$ quel que soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{H}_3$; cela donne le système suivant

$$-\alpha x_2 + (v + b - \beta) x_3 = 0, \qquad (w - c - \gamma) x_3 = 0$$

quels que soient x_2 et x_3. Cela est impossible si $\alpha \neq 0$.

L'Exemple 4.2.E$_4$ nous permet de revenir sur la signification topologique de $\mathscr{P}_F$. En effet le théorème d'effacement n'interprète que la condition (p_2). On peut ajouter que les conditions (p_3) et (p_4) permettent de montrer que si $(\mathfrak{G}, \rho)$ vérifie le théorème d'effacement, alors pour $(\Omega, D) \in Z^2(G, \mathbb{R}) \times \mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G})$ on peut construire dans $\mathfrak{G}_\Omega$ (resp. dans $\mathfrak{G}_D$) un relèvement admissible (resp. une extension admissible) qui vérifie de nouveau le théorème d'effacement. Les commentaires ci-dessus donnent tout son sens géométrique au Théorème 4.2.1 énoncé plus bas.

Nous allons traiter en détail deux examples qui jouent des rôles importants dans la suite.

Exemple 4.2.1. Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie commutative munie de sa KA-structure triviale $(\mathfrak{G}, \sigma)$. Soit $F(\mathfrak{G})$ un drapeau quelconque dans $\mathfrak{G}$. On a $H^2(\mathfrak{G}, \mathbb{R}) = \bigwedge^2 \mathfrak{G}^*$ et $\mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G}) = E_F^0(\mathfrak{G})$. La KV-structure $(\mathfrak{G}, \sigma)$ a les propriétés $\mathscr{P}_F$.

(p_1) Que $(\mathfrak{G}, \sigma)$ soit homotope à zéro est immédiat.

(p_2) Considérons l'application linéaire $D \to (D, 0)$ de $E_F^0(\mathfrak{G})$ dans $E_F^0(\mathfrak{G}) \times \mathfrak{G}$; le couple $(D, 0)$ vérifie les propriétés (a) et (b) de (p_2).

(p_3) Soit $\Omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{G}^*$; posons $\Phi_\Omega = \frac{1}{2}\Omega^\#$, on a $\partial \Phi_\Phi = \Omega$. Soit $D \in E_F^0(\mathfrak{G})$ il est clair que $D\Omega = 0$ entraîne $\Phi_{\Phi D} = 0$.

(p_4) Soient D, D' dans $E_F^0(\mathfrak{G})$, $\Omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{G}^*$ tels que $D\Omega = D'\Omega = 0$. Soient α et α' dans $\mathfrak{G}^*$ tels que $D\alpha' - D'\alpha = 0$; d'après la définition de $a_D = \alpha$ et de $a_{D'} = \alpha'$ on a

$$A_D a_{D'} - A_{D'} a_D = D\alpha' - D'\alpha = \frac{1}{2}\Omega^\#(0) = 0.$$

Exemple 4.2.2. Soit $\mathfrak{H}_3$ l'algèbre de Heisenberg munie de la KV-structure de l'Exemple 3.4.2.

$$\rho(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3) = (\tfrac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2), 0, 0).$$

Considérons le drapeau $F(\mathfrak{H}_3)$ engendré par la base (e_1, e_2, e_3) avec $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_1, e_2] = [e_1, e_3] = 0$. $(\mathfrak{H}_3, \rho)$ a les propriétés $\mathscr{P}_F$.

(p_1) On a déjà vu que cette structure est $\mathscr{D}_F^0$-homotope à zéro.

(p_2) Soit $D \to (A_D, U_D)$ l'application linéaire qui associe à

$$D = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

l'endomorphisme

$$A_D = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}a_{12} & \frac{1}{2}a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et le vecteur U_D des composantes $U_D = (0, a_{13}, -a_{12})$. On a les relations suivantes

$$[A_\rho, \rho(X)] = \rho(DX), \qquad (A_D - D)(X) = \rho(X)U_D.$$

(p_3) Calculons $H_\rho^1(\mathfrak{H}_3, \mathfrak{H}_3^*)$. Soit $\Phi \in C_\rho^1(\mathfrak{H}_3, \mathfrak{H}_3^*)$. Nous identifions Φ avec sa matrice écrite dans la base (e_1, e_2, e_3)

$$\Phi = [\Phi_{ij}], \qquad 1 \le i, j \le 3.$$

Les cocycles $\Phi \in Z_\rho^1(\mathfrak{H}_3, \mathfrak{H}_3^*)$ sont définis par les équations suivantes:

$$\Phi_{11} = 0, \quad 2\Phi_{12} + \Phi_{21} = 0, \quad 2\Phi_{13} + \Phi_{31} = 0.$$

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathfrak{H}_3^*$ on a

$$d_\rho\lambda(X, Y) = -\tfrac{1}{2}\lambda_1(x_2, y_3 - x_3y_2).$$

De sorte que la matrice de $d_\rho\lambda$ est

$$d_\rho\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\lambda \\ 0 & \frac{1}{2}\lambda_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut identifier $H_\rho^1(\mathfrak{H}_3, \mathfrak{H}_3^*)$ avec le sous-espace des matrices carrés de la forme suivante:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & \theta & \eta \\ -2\theta & \Phi_{22} & 0 \\ -2\eta & 0 & \Phi_{33} \end{bmatrix}.$$

On a donc $\partial^1 H^1_\rho(\mathfrak{H}_3, \mathfrak{H}_3^*) = H^2(\mathfrak{H}_3, \mathbb{R})$. On observe que ($p_3$) est automatiquement vérifié si $[D] = 0$ ou si $[\Omega] = 0$. Soit donc $D \in \mathscr{D}^0_F(\mathfrak{H}_3)$ avec $[D] \neq 0$. On a alors

$$D = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad a_{23} \neq 0.$$

Soit $\Omega = (\Omega_{ij}) \in Z^2(\mathfrak{H}_3, \mathbb{R})$ avec $[\Omega] \neq 0$. Les conditions $a_{23} \neq 0$ et $D\Omega \sim 0$ entraînent $\Omega_{12} = 0$. Soit Φ_Ω un élément de $\partial^{-1}(\Omega)$. La condition $[\Phi_{\Omega D}] = 0 \in H^1_l(\mathfrak{H}_3, \mathfrak{H}_3^*)$ entraîne les conditions suivantes:

$$\Phi_{22} = 0, \qquad \Phi_{23} + \Phi_{32} = 0.$$

Par conséquent, compte tenu des équations de $Z^1_\rho(\mathfrak{H}_3, \mathfrak{H}_3^*)$ on voit que si Φ_Ω vérifie (p_3) on aura

$$\Phi_\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3}\Omega_{13} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\Omega_{23} \\ -\frac{2}{3}\Omega_{13} & -\frac{2}{2}\Omega_{23} & \Omega_{33} \end{bmatrix}$$

Φ_Ω ne dépend que de Ω, et pour $D \in \mathscr{D}^0_F(\mathfrak{H}_3)$ on voit que $D\Omega \sim 0$ entraîne $\psi_{\Omega D} \sim 0$.

(p_4) Soient D et D' dans $\mathscr{D}^0_F(\mathfrak{H}_3)$ et $\Omega \in Z^2(\mathfrak{H}_3, \mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe α et α' dans $\mathfrak{H}_3^*$ tels que

$$D\Omega = \delta\alpha, \qquad D'\Omega = \delta\alpha';$$
$$D\alpha' - D'\alpha = \Omega^\#(A_D U_{D'} - A_{D'} U_D).$$

On suppose que $[D]$ et $[D']$ ne sont pas tous nuls. On a donc $\Omega_{12} = 0$. Posons $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$. Les conditions $D\Omega = \delta\alpha$ et $D'\Omega = \delta\alpha'$ entraînent

$$\alpha = (a_{12}\Omega_{13}, \alpha_2, \alpha_3), \qquad \alpha' = (a'_{12}\Omega_{13}, \alpha'_2, \alpha'_3).$$

Posons $\xi_{DD'} = A_D U_{D'} - A_{D'} U_D = (a_{12}a'_{13} - a'_{12}a_{13}, a_{12}a'_{23} - a'_{12}a_{23}, 0)$. On déduit de l'hypothèse $D\alpha' - D'\alpha = \Omega^\#(\xi_{DD'})$ l'égalité

$$\begin{aligned}(0, 0(a_{12}a'_{13} &- a'_{12}a_{13})\Omega_{13} + \alpha_2 a'_{23} - \alpha'_{23}) \\ &= (0, 0, (2_{12}a'_{13} - a'_{12}a_{13})\Omega_{13} + (a_{12}a'_{23} - a'_{12}a_{23})\Omega_{23}).\end{aligned}$$

On a donc $\alpha_2 a'_{23} - \alpha'_2 a_{23} = (a_{12}a'_{23} - a'_{12}a_{23})\Omega_{23}$. D'après la définition de a_D et de $a_{D'}$ on a

$$a_D(X) = \alpha(X) + \Phi_\Omega(X, U_D), \qquad a_{D'}(X) = \alpha'(X) + \Phi_\Omega(X, U_{D'}).$$

c'est-à-dire

$$a_D = (\tfrac{2}{3}a_{12}\Omega_{13}\,,\ \alpha_2 - \tfrac{1}{2}a_{12}\Omega_{23}\,,\ \alpha_3 - \tfrac{1}{2}a_{13}\Omega_{23} - a_{12}\Phi_{33})$$

et l'expression analogue pour $a_{D'}$. Compte tenu de ces expressions on a

$$\begin{aligned} A_D a_{D'} - A_{D'} a_D &= (0\,,\,0\,,\ \tfrac{1}{3}(a_{12}a'_{13} - a'_{12}a_{13})\Omega_{13} + \alpha_2 a'_{23} - \alpha'_2 a_{23}) \\ &\quad - \tfrac{1}{2}(a_{12}a'_{23} - a'_{12}a_{23}) \\ &= (0\,,\,0\,,\ \tfrac{1}{3}(a_{12}a'_{13} - a\,;_{12}\,a_{13})\Omega_{13} + \tfrac{1}{2}\Omega_{23}(a_{12}a'_{23} - a'_{12}a_{23})). \end{aligned}$$

D'un autre côté on a

$$\Phi_\Omega(\xi_{DD'}) = (0\,,\,0\,,\ \tfrac{1}{3}\Omega_{13}(a_{12}a'_{13} - a'_{12}a_{13}) + \tfrac{1}{2}\Omega_{23}(a_{12}a'_{23} - a'_{12}a_{23}))$$

ce qui prouve que l'on a finalement

$$A_D a_{D'} - A_{D'} a_D = \Phi_\Omega(\xi_{DD'}).$$

On va mettre en évidence quelques propriétés supplémentaires des KV-structures normales de type central qui vérifient $\mathscr{P}_F$. Soit $(\mathfrak{G}\,,\,\rho)$ une KV-structure qui a les propriétés $\mathscr{P}_F$. Fixons une application $(D\,,\,\Omega) \to (A_D\,,\,U_D\,,\,\Phi_\Omega)$ de $\mathscr{D}^0_F(\mathfrak{G}) \times Z^2(\mathfrak{G}\,,\,\mathbb{R})$ dans $E^0_F(\mathfrak{G}) \times \mathfrak{G} \times Z^1_\rho(\mathfrak{G}\,,\,\mathfrak{G}^*)$ qui vérifie les propriétés (p_1), (p_2), (p_3) et (p_4). A chaque $D \in \mathscr{D}^0_F(\mathfrak{G})$ (resp. à chaque $\Omega \in \partial Z^1_\rho(\mathfrak{G}\,,\,\mathfrak{G}^*)$) on associe la D-extension $(\mathfrak{G}_D\,,\,\rho_D)$ (resp. le Ω-relèvement $(g_\Omega\,,\,\rho_\Omega)$) définie par la formule suivante:

$$\rho_D(X\,,\,x)\cdot(Y\,,\,y) = ((\rho(x) + xA_D)Y + y(\rho(X) + xA_D)U_D\,,\,0)$$

pour $(X\,,\,x)$ et $(Y\,,\,y)$ dans $\mathfrak{G} \times \mathbb{R} \simeq \mathfrak{G}_D$; $(\mathfrak{G}_\Omega\,,\,\rho_\Omega)$ est défini par

$$\rho_\Omega(x\,,\,X)\cdot(y\,,\,Y) = (\Phi_\Omega(X\,,\,Y)\,,\,\rho(X)Y)$$

pour $(x\,,\,X)$ et $(y\,,\,Y)$ dans $\mathbb{R}\times\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_\Omega$. Dans la suite les KV-structures $(\mathfrak{G}_D\,,\,\rho_D)$ (resp. $(\mathfrak{G}_\Omega\,,\,\rho_\Omega)$) associées à une application $(D, \Omega) \to (A_D\,,\,U_D\,,\,\Phi_\Omega)$ seront appelées *D-extension admissible* (resp. *relèvement admissible*) de $(\mathfrak{G}\,,\,\rho)$ associées à $(D\,,\,\Omega) \to (A_D\,,\,U_D\,,\,\Phi_\Omega)$.

Lemme 4.2.1. *Soit $(G\,,\,\rho)$ une KV-structure normale de type central. Soit $F(\mathfrak{G})$ un drapeau normal de type central préservé par ρ. On suppose que $(\mathfrak{G}\,,\,\rho)$ a les propriétés $\mathscr{P}_F$. Pour tout $\Omega \in \partial^1 Z^1_\rho(\mathfrak{G}\,,\,\mathfrak{G}^*)$ le Ω-relèvement admissible associé à Φ_Ω est $\mathscr{D}^0_F(\mathfrak{G}_\Omega)$-homotope à zéro.*

Démonstration. Soit $(D\,,\,\Omega) \to (A_D\,,\,U_D\,,\,\Phi_\Omega) \in E^0_F(\mathfrak{G})\times\mathfrak{G}\times Z^1_\rho(\mathfrak{G}\,,\,\mathfrak{G}^*)$ une application qui vérifie les propriétés $\mathscr{P}_{\mathscr{F}}$. On fixe une base (e_i) qui engendre $F(\mathfrak{G})$ et on complète (e_i) par $e_0 = (1\,,\,0) \in \mathfrak{G}_\Omega$ pour obtenir une base de $\mathfrak{G}_\Omega$, on note $F(\mathfrak{G}_\Omega)$ le drapeau de $\mathfrak{G}_\Omega$ engendré par la base $(e_0, e_1, \cdots)$ la matrice de ρ_Ω dans la base (e_i) est

$$\rho_\Omega(x, X) = \begin{bmatrix} 0 & \Phi_\Omega(X) \\ 0 & \rho(X) \end{bmatrix}.$$

Soit $\widetilde{D} \in \mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G}_\Omega)$ représenté dans la base (e_i) par la matrice

$$\widetilde{D} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_D \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

où $\alpha_D \in \mathfrak{G}^*$ et $D \in \mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G})$ vérifient la condition $D\Omega = \delta\alpha_D$. En vertu de (p_3) il existe une forme linéaire $a \in \mathfrak{G}^*$ telle que $-d_\rho a = \psi_{\Omega D}$ c'est-à-dire

$$a(\rho(X)Y) = \Phi_\Omega(DX, Y) + \Phi_\Omega(X, A_D, Y).$$

Soit $(X, Y) \in \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ et soit $a_D \in \mathfrak{G}^*$ défini comme dans (p_4) par

$$a_D(X) = \alpha_D(X) + \Phi_\Omega(X, U_D).$$

Calculons

$$\begin{aligned}(a - a_D)([X, Y]) = \Phi_\Omega(DX, Y) &+ \Phi_\Omega(X, A_D Y) - \Phi_\Omega(DY, X) \\ &- \Phi_\Omega(Y, A_D X) - \alpha_D[X, Y] - \Phi_\Omega([X, Y], U_D).\end{aligned}$$

Puisque $D\Omega = \delta\alpha_D$ et $\partial\Phi_\Omega = \Omega$ on a

$$(a - a_D)([X, Y]) = (D\Omega)(X, Y) - \delta\alpha(X, Y) = 0.$$

Puisque $(\mathfrak{G}, \rho)$ est normale on a $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}] = \rho(\mathfrak{G})\mathfrak{G}$; par conséquent pour tout (X, Y) dans $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ on aura

$$\Phi_\Omega(DX, Y) + \Phi_\Omega(X, A_D Y) = a_D(\rho(X)Y).$$

En d'autres termes la forme linéaire $-a_D$ est une primitive de $\psi_{\Omega D}$. Posons maintenant

$$A_{\tilde{D}} = \begin{bmatrix} 0 & a_D \\ 0 & A_D \end{bmatrix}.$$

L'endomorphisme $A_{\tilde{D}} \in E_F^0(\mathfrak{G}_\Omega)$ ainsi obtenu vérifie la condition

$$[A_{\tilde{D}}, \rho_\Omega(x, X)] = \rho_\Omega(\widetilde{D}(x, X)).$$

Ce qui prouve le Lemme 4.2.1.

Corollaire 4.2.2. *Si* $(\mathfrak{G}, \rho)$ *a les propriétés* $\mathscr{P}_F$. *Soit* $\Omega \in \partial(Z_\rho^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*))$. *Alors tout* Ω*-relèvement admissible* $(\mathfrak{G}_\Omega, \rho_\Omega)$ *vérifie les condition* (p_1) *et* (p_2) *de* $\mathscr{P}_{\mathscr{F}}(\mathfrak{G}_\Omega)$.

Preuve. D'après le Lemma 4.2.1 $(\mathfrak{G}_\Omega, \rho_\Omega)$ vérifie (p_1). Soit $\widetilde{D} \in \mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G}_\Omega)$ représenté par la matrice

$$\widetilde{D} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_D \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

avec $D \in \mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G})$ et $D\Omega = \delta\alpha_D$. Considérons un élément de $\mathfrak{G}_D$ de la forme $U_{\tilde{D}} = (u_D, U_D)$. On a visiblement

$$\begin{aligned}(A_{\tilde{D}} - \widetilde{D})(x, X) &= ((a_D - \alpha)(X), (A_D - D)X) \\ &= (\Phi_\Omega(X, U_D), \rho(X)U_D) = \rho_\Omega(x, X)U_{\tilde{D}},\end{aligned}$$

où $A_{\tilde{D}}$ est l'endomorphisme obtenu comme dans le Lemme 4.2.1. en posant

$$A_{\tilde{D}} = \begin{bmatrix} 0 & a_D \\ 0 & A_D \end{bmatrix}.$$

Cela prouve que $(\mathfrak{G}_\Omega, \rho_{\mathfrak{G}})$ vérifie (p_2).

Corollaire 4.2.3. *Soient* $(\mathfrak{G}, \rho)$ *et* $F(\mathfrak{G})$ *comme dans le Lemme* 4.2.1. *Si* $\partial^1 H_\rho^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*) = H^2(\mathfrak{G}, \mathbb{R})$ *alors pour tout* $D \in \mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G})$ *et pour D-extension admissible* $(\mathfrak{G}_D, \rho_D)$ *de* $(\mathfrak{G}, \rho)$ *on a aussi* $\partial^1 G_{\rho_D}^1(\mathfrak{G}_D, \mathfrak{G}_D^*) = H^2(\mathfrak{G}_D, \mathbb{R})$.

Démonstration. Ce résultat est une conséquence immédiate du Corollaire 4.2.2. En fait soit $D \in \mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G})$ et soit $(\mathfrak{G}_D, \rho_D)$ une extension admissible de $(\mathfrak{G}, \rho)$. Soit $F(\mathfrak{G}_D) = F(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{G}_D$. Dans une base qui engendre $F(\mathfrak{G}_D)$ on a:

$$\rho_D(X, x) = \begin{bmatrix} \rho(X) + xA_D & (\rho(X) + xA_D)U_D \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soit $\hat{\Omega} \in Z^2(\mathfrak{G}_D, \mathbb{R})$; posons $\hat{\omega} = \hat{\Omega}|_{\mathfrak{G}}$; soit $\mathfrak{G}_{\hat{\omega}}$ l'idéal de $\mathfrak{G}_{D\hat{\Omega}}$ qui se projette sur $\mathfrak{G}$, il existe un unique $\widetilde{D} \in \mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G}_{\hat{\omega}})$ tel que $\mathfrak{G}_{D\hat{\Omega}} = \mathfrak{G}_{\hat{\omega}\tilde{D}}$. On a

$$\widetilde{D} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_D \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

avec $D\hat{\omega} = \delta\alpha_D$. Soit $(\mathfrak{G}_{\hat{\omega}}, \rho_{\hat{\omega}})$ le relèvement admissible de $(\mathfrak{G}, \rho)$ associé à $\Phi_{\hat{\omega}}$. En vertu du Corollaire 4.2.2 il existe une $\widetilde{D}$-extension de $(\mathfrak{G}_{\hat{\omega}}, \rho_{\hat{\omega}})$ qui se projette en la KV-structure $(\mathfrak{G}_D, \rho_D)$; ce qui prouve que $\hat{\Omega} \in \partial Z_{\rho_D}^1(\mathfrak{G}_D, \mathfrak{G}_D^*)$; le Corollaire 4.2.3 est démontré.

Le résultat que nous voulons établir est l'extension (resp. le relèvement) des propriétés $\mathscr{P}_F$ des KV-structures normales de type central à leurs extensions admissibles (resp. à leurs relèvements admissibles).

Théorème 4.2.1. *Soit $(\mathfrak{G}, \rho)$ une KV-structure normale de type central. Soit $F(\mathfrak{G})$ un drapeau normal de type central préservé par ρ. On suppose que ρ a les propriétés $\mathscr{P}_F$. Soit $(D, \Omega) \to (A_D, U_D, \Phi_\Omega)$ une application de $\mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G}) \times \partial Z_\rho^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*)$ dans $D_F^0(\mathfrak{G}) \times \mathfrak{G} \times Z_\rho^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*)$ qui vérifie les conditions (p_i), $1 \leq i \leq 4$. Soit (D, Ω) un couple tel que $D\Omega \sim 0$. On munit $\mathfrak{G}_D$ et $\mathfrak{G}_\Omega$ respectivement de la D-extension admissible $(\mathfrak{G}_D, \rho_D)$ et du Ω-relèvement admissible $(G_{\hat{\Omega}}, \rho_\Omega)$ associés à (A_D, U_D, Φ_Ω). On suppose que $(\mathfrak{G}_D, \rho_D)$ et $(\mathfrak{G}_\Omega, \rho_\Omega)$ ont les propriétés $\mathscr{P}_F$. Alors il existe une extension admissible $(\mathfrak{G}_{\Omega\hat{D}}, \rho_{\Omega\hat{D}})$ de $(\mathfrak{G}_\Omega, \rho_\Omega)$ dans $(\Omega, \mathfrak{G}, D)$ qui se projette en la D-extension admissible $(\mathfrak{G}_D, \rho_D)$ et qui a les propriétés $\mathscr{P}_F$.*

Démonstration. On considère le carré commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{G}_\Omega & \longrightarrow & \mathfrak{G}_{\Omega D} \\ \downarrow & & \uparrow \\ \mathfrak{G} & \longrightarrow & \mathfrak{G}_D \end{array}$$

On fixe dans $\mathfrak{G}_\Omega$, $\mathfrak{G}_D$ et $\mathfrak{G}_{\Omega D}$ les drapeaux qui sont obtenus naturellement à partir de $F(\mathfrak{G})$. Notons $\widetilde{D}$ l'élément de $\mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G}_\Omega)$ tel que $\mathfrak{G}_{\Omega D} = (\mathfrak{G}_\Omega, \widetilde{D})$. On a

$$\widetilde{D} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_D \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

avec $D\Omega = \delta\alpha_D$. Soit $a_D \in \mathfrak{G}^*$ défini par

$$a_D(X) = \alpha_D(X) + \Phi_\Omega(X, U_D).$$

On sait que l'on obtient une primitive $-A_{\hat{D}}$ de $\rho_\Omega(\widetilde{D})$ en posant $A_{\hat{D}}(x, X) = (a_D(X), A_D(X))$ pour tout $(x, X) \in \mathfrak{G}_\Omega$. Soit $U_{\hat{D}} = (u_D, U_D) \in \mathfrak{G}_\Omega$; les corollaires du Lemme 4.2.1 montrent que $U_{\hat{D}}$ est une primitive de $A_{\hat{D}} - \widetilde{D}$. On va munir $(\Omega, \mathfrak{G}, D)$ de la KV-structure associée au couple $(A_{\hat{D}}, U_{\hat{D}})$. On a donc pour tout $(X, x) \in \mathfrak{G}_\Omega \times \mathbb{R} \simeq (\Omega, \mathfrak{G}, D)$:

$$\rho_{\Omega D}(X, x) = \begin{bmatrix} \rho_\Omega(X) + xA_{\hat{D}} & (\rho_\Omega(X) + xA_{\hat{D}})U_{\hat{D}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On va montrer que $(\mathfrak{G}_{\Omega D}, \rho_{\Omega D})$ a les propriétés $\mathscr{P}_F$. En fait il résulte du Corollaire 4.2.2 que $(\mathfrak{G}_{\Omega D}, \rho_{\Omega D})$ vérifie les conditions (p_1) et (p_2).

(p_3) Soit $\hat{\Omega} \in \delta Z_{\Omega D}^1(\mathfrak{G}_{\Omega D}, \mathfrak{G}_{\Omega D}^*) \subset Z^2(\mathfrak{G}_{\Omega D}, \mathbb{R})$. Posons $\hat{\omega} = \hat{\Omega}|_{\mathfrak{G}_\Omega}$; on a $\hat{D}\hat{\omega} \sim 0$. Puisque $(\mathfrak{G}_\Omega, \rho_\Omega)$ a les propriétés $\mathscr{P}_F$, soit $\Phi_{\hat{\omega}} \in Z_{\rho_\Omega}^1(\mathfrak{G}_\Omega, \mathfrak{G}_\Omega^*)$ qui vérifie (p_3). Soit $\hat{D} \in \mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G}_{\Omega\hat{D}})$ qui se projette en la dérivation $\hat{D} \in \mathfrak{D}_F^0(\Omega)$. En posant $\mathfrak{G}_{\Omega D\hat{D}} = (\hat{D}, \mathfrak{G}_{\Omega D})$ on a le diagramme commutatif d'homomorphismes d'algèbre de Lie:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{G}_{\Omega\hat{\omega}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{G}_{\Omega D\widehat{\Omega}} \arrow[d] \\
\mathfrak{G}_{\Omega} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{G}_{\Omega D} \arrow[d] \\
\mathfrak{G} \arrow[r] & \mathfrak{G}_{D}
\end{tikzcd}$$

On munit $\mathfrak{G}_{\Omega\hat{\omega}}$ du $\hat{\omega}$-relèvement admissible $\rho_{\Omega\hat{\omega}}$ associé à $\Phi_{\hat{\omega}}$. En vertu du Corollaire 4.2.2 la KV-structure $(\mathfrak{G}_{\Omega\hat{\omega}}, \rho_{\Omega\hat{\omega}})$ vérifie les conditions (p_1) et (p_2). Soit $(A_{\hat{D}}, U_{\hat{D}})$ un couple dans $E_F^0(\mathfrak{G}_{\Omega\hat{D}}) \times \mathfrak{G}_{\Omega\hat{\omega}}$ qui vérifie les conditions suivantes

$$[A_{\hat{D}}, \rho_{\Omega\hat{\omega}}(X)] = \rho_{\Omega\hat{\omega}}(\hat{D}X), \qquad (A_{\hat{D}} - \hat{D})(X) = \rho_{\Omega\hat{\omega}}(X)U_{\hat{D}}$$

pour tout X dans $\mathfrak{G}_{\Omega\hat{\omega}}$; on choisit $(A_{\hat{D}}, U_{\hat{D}})$ qui se projette dans $E_F^0(\mathfrak{G}_{\Omega}) \times \mathfrak{G}_{\Omega}$ sur le couple $(A_{\hat{D}}, U_{\hat{D}})$. On munit alors $\mathfrak{G}_{\Omega D\hat{\Omega}}$ de la $\hat{D}$-extension admissible associée au couple $(A_{\hat{D}}, U_{\hat{D}})$; le diagramme décrit ci-dessus devient un diagramme commutatif des KV-structures. Considérons maintenant $\tilde{\Delta} \in \mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G}_{\Omega D})$ tel que $\tilde{\Delta}\hat{\Omega} \sim 0$. Soit $\tilde{\alpha} \in \mathfrak{G}_{\Omega D}^*$ tel que $\tilde{\Delta}\hat{\Omega} = \delta\tilde{\alpha}$. Notons Δ la projection de $\tilde{\Delta}$ dans $\mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G}_D)$, $\Delta_0 = \Delta|_{\mathfrak{G}}$ et $\tilde{\Delta}_0 = \tilde{\Delta}|_{\mathfrak{G}_\Omega}$. Soit $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}|_{\mathfrak{G}_\Omega}$; on a alors

$$\tilde{\Delta}_0\hat{\omega} = \delta\tilde{\alpha}_0.$$

Il existe une dérivation $\hat{\Delta} = \mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G}_{\Omega D\hat{\Omega}})$ défini par

$$\hat{\Delta}(x, X) = (\hat{\alpha}(X), \tilde{\Delta}(X))$$

pour (x, X) dans $R \times \mathfrak{G}_{\Omega D}$. Si on pose

$$\hat{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{G}_{\Omega D\hat{\Omega}}, \hat{\Delta}), \quad \mathfrak{A} = (\mathfrak{G}_{\Omega D}, \tilde{\Delta}),$$
$$\tilde{\mathfrak{A}}_0 = (\mathfrak{G}_{\Omega}, \tilde{\Delta}_0), \quad \text{soit } \hat{\mathfrak{A}}_0 \text{ l'idéal de } \hat{\mathfrak{A}}$$

qui se projette sur $\mathfrak{A}_0$; on obtient le diagramme commutatif d'algèbre de Lie suivant:

$$\begin{tikzcd}
& \hat{\mathfrak{A}}_0 \arrow[rr] \arrow[dd] & & \hat{\mathfrak{A}} \arrow[dd] \\
\mathfrak{G}_{\Omega\hat{\omega}} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathfrak{G}_{\Omega D\hat{\Omega}} \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
& \mathfrak{A}_0 \arrow[rr, dashed] & & \mathfrak{A} \\
\mathfrak{G}_{\Omega} \arrow[ur, dashed] \arrow[rr] & & \mathfrak{G}_{\Omega D} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Conformément aux notations antérieures on a

$$\hat{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\alpha}_0 \\ 0 & \tilde{\Delta}_0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{D} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{\hat{D}} \\ 0 & \tilde{D} \end{bmatrix}.$$

La commutativité du cube ci-dessus implique les relations suivantes:

(a) $\tilde{D}\hat{\omega} = \delta\alpha_{\hat{D}}$, $\tilde{\Delta}_0\hat{\omega} = \delta\hat{\alpha}_0$,

(b) $\tilde{\Delta}_0\alpha_{\hat{D}} - \tilde{D}\hat{\alpha}_0 = \Omega^{\#}(A_{\tilde{\Delta}}U_{\tilde{D}} - A_{\tilde{D}}U_{\tilde{\Delta}})$,

(c) $[\tilde{\Delta}_0, \tilde{D}] = \mathrm{ad}(A_{\tilde{\Delta}}U_{\tilde{D}} - A_{\tilde{D}}U_{\tilde{\Delta}})$,

Puisque $(\mathfrak{G}_\Omega, \rho_\Omega)$ a les propriétés $\mathscr{P}_F$, les égalités (a) et (b) ci-dessus entraînent la suivante:

(d) $A_{\tilde{\Delta}}a_{\tilde{D}} - A_{\tilde{D}}a_{\tilde{\Delta}} = \Phi_{\hat{\omega}}(A_{\tilde{\Delta}}U_{\tilde{D}} - A_{\tilde{D}}U_{\tilde{\Delta}})$.

Par ailleurs (c) et (b) équivalent à l'existence dans $\hat{\mathfrak{A}}$ d'une KV-structure $(\hat{\mathfrak{A}}, \rho_{\hat{\Omega}\hat{\Delta}})$ qui se projette en la $\tilde{\Delta}$-extension admissible du $\rho_{\Omega D}$ associée au couple $(A_{\tilde{\Delta}}, U_{\tilde{\Delta}})$ et qui induit $(\mathfrak{G}_{\Omega D\hat{\Omega}}, \rho_{\Omega D\hat{\Omega}})$. Le cube ci-dessus est donc un diagramme commutatif des KV-structures. Soit $\Phi_{\hat{\Omega}} \in Z^1_{\rho_{\Omega D}}(\mathfrak{G}_{\Omega D'}, \mathfrak{G}^*_{\Omega D})$ défini par $\rho_{\Omega D\hat{\Omega}}(x, X)\cdot(y, Y) = (\Phi_{\hat{\Omega}}(X, Y), \rho_{\Omega D}(X)Y)$, pour (x, X) et (y, Y) dans $R \times \mathfrak{G}_{\Omega D}$. Puisque $(\hat{\mathfrak{A}}, \rho_{\hat{\Omega}\hat{\Delta}})$ est un relèvement admissible de la $\tilde{\Delta}$-extension admissible de $(\mathfrak{G}_{\Omega D}, \rho_{\Omega D})$ associé au couple $(A_{\tilde{\Delta}}, U_{\tilde{\Delta}})$ il existe une forme linéaire $a_{\tilde{\Delta}} \in \mathfrak{G}^*_{\Omega D}$ tel que pour X et Y dans $\mathfrak{G}_{\Omega D}$ on a

$$\Phi_{\hat{\Omega}}(\tilde{\Delta}X, Y) + \Phi_{\hat{\Omega}}(X, A_{\tilde{\Delta}}Y) = a_{\tilde{\Delta}}(\rho_{\Omega D}(X)Y).$$

Le cocycle $\Phi_{\hat{\Omega}}$ étant indépendant de $\tilde{\Delta} \in \mathscr{D}^0_F(\mathfrak{G})$ on voit que la KV-structure $(\mathfrak{G}_{\Omega D}, \rho_{\Omega D})$ vérifie la condition (p_3).

(p_4) Il reste à montrer que $(\mathfrak{G}_{\Omega D}, \rho_{\Omega D})$ vérifie la propriété (p_4). On commence par observer qu'en vertu du Corollaire 4.2.2 les propriétés (p_1), (p_2) et (p_3) de $(\mathfrak{G}_{\Omega D}, \rho_{\Omega D})$ entrainent les propriétés (p_1) et (p_2) pour $(g_{\Omega D\hat{\Omega}}, \rho_{\Omega D\hat{\Omega}})$; en effet soit $\tilde{\Delta} \to (A_{\tilde{\Delta}}, U_{\tilde{\Delta}})$ l'application de $\mathscr{D}^0_F(\mathfrak{G}_{\Omega D})$ dans $E^0_F(\mathfrak{G}_{\Omega D}) \times \mathfrak{G}_{\Omega D}$ utilisée jusqu'ici; la propriété (p_3) entraîne que pour chaque $\tilde{\Delta}$ la forme linéaire

$$a_{\tilde{\Delta}}: X \to \alpha_{\tilde{\Delta}}(X) + \Phi_{\hat{\Omega}}(X, U_{\tilde{\Delta}})$$

est une primitive du cocycle $\psi_{\hat{\Omega}\tilde{\Delta}}$. On itère un procédé déjà utilisé en posant

$$\hat{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{\tilde{\Delta}} \\ 0 & \tilde{\Delta} \end{bmatrix}, \quad A_{\hat{\Delta}} = \begin{bmatrix} 0 & a_{\tilde{\Delta}} \\ 0 & A_{\tilde{\Delta}} \end{bmatrix}, \quad U_{\hat{\Delta}} = (u_{\tilde{\Delta}}, U_{\tilde{\Delta}}).$$

On a alors les relations (p_1) et (p_2)

$$[A_{\hat{\Delta}}, \rho_{\Omega D\hat{\Omega}}(X)] = \rho_{\Omega D\hat{\Omega}}(\hat{\Delta}X), \qquad (A_{\hat{\Delta}} - \hat{\Delta})(X) = \rho_{\Omega D\hat{\Omega}}(X)U_{\hat{\Delta}}.$$

Considérons maintenant un second élément $\tilde{\Delta}' \in \mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G}_{\Omega D})$ tel que $\tilde{\Delta}'\hat{\Omega} \sim 0$. Soit $\alpha_{\tilde{\Delta}'} \in \mathfrak{G}^*_{\Omega D}$ tel que $\tilde{\Delta}'\hat{\Omega} = \delta_{\alpha_{\tilde{\Delta}'}}$. On suppose que $(\tilde{\Delta}, \alpha_{\tilde{\Delta}})$ et $(\tilde{\Delta}', \alpha_{\tilde{\Delta}'})$ sont liés par les conditions figurant dans l'hypothèse de (p_4) à savoir:

$$\tilde{\Delta}\alpha_{\tilde{\Delta}'} - \tilde{\Delta}'\alpha_{\tilde{\Delta}} = \hat{\Omega}^{\#}(A_{\tilde{\Delta}}U_{\tilde{\Delta}'} - A_{\tilde{\Delta}}U_{\tilde{\Delta}}).$$

Nous voulons prouver que l'égalité suivante est vraie

$$A_{\hat{\Delta}}a_{\hat{\Delta};} - A_{\hat{\Delta}'}a_{\hat{\Delta}} = \Phi_{\hat{\Omega}}(A_{\hat{\Delta}}U_{\hat{\Delta}'} - A_{\hat{\Delta}'}U_{\hat{\Delta}}).$$

Pour cela on écrit les données dans une base qui engendre $F(\mathfrak{G}_{\Omega D}) = F(\mathfrak{G}_{\Omega}) \subset \mathfrak{G}_{\Omega D}$:

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & -{}^t\Delta \\ \Delta & 0 \end{bmatrix},$$

où $\Delta \in \mathfrak{G}^*_{\Omega}$ avec $\tilde{D}\hat{\omega} = \delta\Delta$;

$$\tilde{\Delta} = \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}_0 & \xi_{\tilde{\Delta}_0\tilde{D}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\Delta}' = \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}'_0 & \xi_{\tilde{\Delta}'_0\tilde{D}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Posons également

$$\alpha_{\tilde{\Delta}} = (\alpha_0, \lambda) \in \mathfrak{G}^*_{\Omega} \times \mathbb{R}, \qquad \alpha_{\tilde{\Delta}'} = (\alpha'_0, \lambda') \in \mathfrak{G}^*_{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Les hypothèses de (p_4) s'expriment sous la forme des systèmes suivants

$$\hat{\Delta}\hat{\Omega} = \delta\alpha_{\tilde{\Delta}} \rightarrow \begin{cases} \tilde{\Delta}_0\hat{\omega} = \delta\alpha_0, \\ \tilde{\Delta}\alpha_0 - \tilde{\Delta}_0\Delta = 0, \end{cases} \qquad \tilde{\Delta}'\hat{\Omega} = \delta\alpha_{\tilde{\Delta}} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{\Delta}'_0\hat{\omega} = \delta\alpha'_0, \\ \tilde{\Delta}\alpha'_0 - \tilde{\Delta}'_0\Delta = 0. \end{cases}$$

D'un autre côté l'égalité suivante

$$\tilde{\Delta}\alpha_{\tilde{\Delta}'} - \tilde{\Delta}'\alpha_{\tilde{\Delta}} = \Omega^{\#}(A_{\tilde{\Delta}}U_{\tilde{\Delta}'} - A_{\tilde{\Delta}'}U_{\tilde{\Delta}})$$

équivaut au système suivant:

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}_0\alpha'_0 - \tilde{\Delta}'_0\alpha_0 = \hat{\omega}^{\#}(A_{\tilde{\Delta}}U_{\tilde{\Delta}'} - A_{\tilde{\Delta}'}U_{\tilde{\Delta}}), \\ \alpha_0(\xi_{\tilde{\Delta}'_0\tilde{D}}) - \alpha'_0(\xi_{\tilde{\Delta}_0\tilde{D}}) + \Delta(A_{\tilde{\Delta}}U_{\tilde{\Delta}'} - A_{\tilde{\Delta}'}U_{\tilde{\Delta}}) = 0. \end{cases}$$

On observe maintenant que $U_{\tilde{\Delta}}$ est de la forme

$$U_{\tilde{\Delta}} = (U_{\tilde{\Delta}_0} - w_{\Delta_0}U_{\tilde{D}'}w_{\tilde{\Delta}_0}) \in \mathfrak{G}_{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

De sorte que l'on a

$$A_{\tilde{\Delta}}U_{\tilde{\Delta}'} - A_{\tilde{\Delta}'}U_{\tilde{\Delta}} = (A_{\tilde{\Delta}_0}U_{\tilde{\Delta}'_0} - A_{\tilde{\Delta}'_0}U_{\tilde{\Delta}_0}, 0).$$

On déduit des expressions ainsi obtenues les relations suivantes:

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}_0\hat{\omega} = \delta\alpha_0, \\ \tilde{\Delta}'_0\hat{\omega} = \delta\alpha'_0, \\ \tilde{\Delta}_0\alpha'_0 - \tilde{\Delta}'_0\alpha_0 = \hat{\omega}^{\#}(A_{\tilde{\Delta}_0}U_{\tilde{\Delta}'_0} - A_{\tilde{\Delta}'_0}U_{\tilde{\Delta}_0}). \end{cases}$$

Puisque $(\mathfrak{G}_\Omega, \rho_\Omega)$ a les propriétés $\mathscr{P}_{F'}$ les dernières égalités ci-dessus entraînent l'égalité suivante

(4.2.1) $$A_{\tilde{\Delta}_0} a_{\tilde{\Delta}'_0} - A_{\tilde{\Delta}'_0} a_{\tilde{\Delta}'_0} = \Phi_{\hat{\omega}}(A_{\tilde{\Delta}_0} U_{\tilde{\Delta}'_0} - A_{\tilde{\Delta}'_0} U_{\tilde{\Delta}_0})$$

où les formes $a_{\tilde{\Delta}_0}$ et $a_{\tilde{\Delta}'_0}$ sont définies comme précédemment en posant

$$a_{\tilde{\Delta}_0}(X) = \alpha_0(X) + \Phi_{\hat{\omega}}(X, U_{\tilde{\Delta}_0}), \qquad a_{\tilde{\Delta}'_0}(X) = \alpha'_0(X) + \Phi_{\hat{\omega}}(X, U_{\tilde{\Delta}'_0}).$$

Il nous faut donner l'expression explicite de $\Phi_{\hat{\Omega}} \in \mathfrak{G}^*_\Omega \times \mathbb{R}$. Puisque $(\mathfrak{G}_{\Omega D\hat{\Omega}}, \rho_{\Omega D\hat{\Omega}})$ est une $\hat{D}$-extension admissible de $(\mathfrak{G}_{\Omega\hat{\omega}}, \rho_{\Omega\hat{\omega}})$, si on pose $\hat{X} = (\lambda, X, x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{G}_\Omega \times \mathbb{R} = \mathfrak{G}_{\Omega D\hat{\Omega}}$ on aura

$$\begin{aligned}\rho_{\Omega D\hat{\Omega}}(\hat{X}) \cdot \hat{X}' = \Big[&\{\rho_{\Omega\hat{\omega}}(\lambda, X) + xA_{\hat{D}}\}(\lambda', X') \\ &+ x'\,\{\rho_{\Omega\hat{\omega}}(\lambda, X) + xA_{\hat{D}}\} \cdot U_{\hat{D}}\Big].\end{aligned}$$

En projetant cette expression sur la direction $\mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\} \subset \mathfrak{G}_{\Omega D\hat{\Omega}}$ parallèlement à $\mathfrak{G}_\Omega \times \mathbb{R}$ on obtient l'expression de $\Phi_{\hat{\Omega}} \in Z^1_{\rho_{\Omega D}}(\mathfrak{G}_{D\Omega'}, \mathfrak{G}^*_{D\Omega})$, soit

$$\Phi_{\hat{\Omega}}(X, x) = (\Phi_{\hat{\omega}}(X) + xa_{\hat{D}}, \Phi_{\hat{\omega}}(X, U_{\hat{D}}) + xa_{\hat{D}}(U_{\hat{D}})) \in \mathfrak{G}^*_\Omega \times \mathbb{R}.$$

On déduit de cette expression le calcul de la quantité suivante

(4.2.2) $$\begin{aligned}&\Phi_{\hat{\Omega}}(A_{\tilde{\Delta}} U_{\tilde{\Delta}'} - A_{\tilde{\Delta}'} U_{\tilde{\Delta}}) \\ &\quad = (\Phi_{\hat{\omega}}(A_{\tilde{\Delta}_0} U_{\tilde{\Delta}'_0} - A_{\tilde{\Delta}'_0} U_{\tilde{\Delta}_0}), \Phi_{\hat{\omega}}(A_{\tilde{\Delta}_0} U_{\tilde{\Delta}'_0} - A_{\tilde{\Delta}'_0} U_{\tilde{\Delta}_0}, U_{\hat{D}})).\end{aligned}$$

Conformément à l'identification $\mathfrak{G}^*_\Omega \times \mathbb{R} \simeq \mathfrak{G}^*_{\Omega D}$, posons

$$a_{\tilde{\Delta}} = (a_{\tilde{\Delta}_0}, \mu), \qquad a_{\tilde{\Delta}'} = (a_{\tilde{\Delta}'_0}, \mu').$$

On obtient

$$A_{\tilde{\Delta}} a_{\tilde{\Delta}'} = (A_{\tilde{\Delta}_0} a_{\tilde{\Delta}'_0}, a_{\tilde{\Delta}'_0}(A_{\tilde{\Delta}_0} U_{\hat{D}}))$$

car on a

$$A_{\tilde{\Delta}} = \begin{bmatrix} A_{\tilde{\Delta}_0} & A_{\tilde{\Delta}_0} U_{\hat{D}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On obtient de cette façon

(4.2.3) $$A_{\tilde{\Delta}} a_{\tilde{\Delta}'} - A_{\Delta'} a_{\Delta} = (A_{\tilde{\Delta}_0} a_{\tilde{\Delta}'_0} - A_{\tilde{\Delta}'_0} a_{\tilde{\Delta}_0}, a_{\tilde{\Delta}'_0}(A_{\tilde{\Delta}_0} U_{\hat{D}}) - a_{\tilde{\Delta}_0}(A_{\tilde{\Delta}'_0} U_{\hat{D}})).$$

A ce stage les relations (4.2.1), (4.2.2) et (4.2.3) montrent que les quantités $A_{\tilde{\Delta}} a_{\tilde{\Delta}'} A_{\tilde{\Delta}'} a_{\tilde{\Delta}}$ et $\Phi_{\hat{\Omega}}(A_{\tilde{\Delta}} U_{\tilde{\Delta}'} - A_{\tilde{\Delta}'} U_{\tilde{\Delta}})$ ont la même $\mathfrak{G}^*_\Omega$-composante dans $\mathfrak{G}^*_{\Omega D} \simeq \mathfrak{G}^*_\Omega \times \mathbb{R}$.

Pour terminer il reste donc à vérifier que ces quantités ont la même projection sur le facteur $\{0\} \times \mathbb{R}$; pour cela on déduit de l'égalité

$$A_{\tilde{\Delta}_0} a_{\tilde{\Delta}'_0} - A_{\tilde{\Delta}'_0} a_{\tilde{\Delta}_0} = \Phi_{\hat{\omega}}(A_{\tilde{\Delta}_0} U_{\tilde{\Delta}'_0} - A_{\tilde{\Delta}'_0} U_{\tilde{\Delta}_0})$$

l'égalité suivante

$$a_{\tilde{\Delta}_0}(A_{\tilde{\Delta}'_0} U_{\tilde{D}}) - a_{\tilde{\Delta}'_0}(A_{\tilde{\Delta}_0} U_{\tilde{D}}) = \Phi_{\tilde{\omega}}(A_{\tilde{\Delta}_0} U_{\tilde{\Delta}'_0} - A_{\tilde{\Delta}'_0}, U_{\tilde{D}}).$$

Finalement la relation (4.2.3) signifie donc que l'on a

$$A_{\tilde{\Delta}} a_{\tilde{\Delta}'} - A_{\tilde{\Delta}'} a_{\tilde{\Delta}} = \Phi_{\hat{\Omega}}(A_{\tilde{\Delta}} U_{\tilde{\Delta}'} - A_{\tilde{\Delta}'} U_{\tilde{\Delta}}).$$

Ce qui prouve que $(\mathfrak{G}_{\Omega D}, \rho_{\Omega D})$ vérifie la condition (p_4) et le Théorème 4.2.1 est démontré.

Remarque 4.2.1. Au cours de la démonstration de la propriété (p_3) on a utilisé implicitement un résultat qui mérite d'être formulé en détail. En effet soit $(\mathfrak{G}, \rho)$ une KV-structure normale. Soit $F(\mathfrak{G})$ un drapeau prèservé par ρ. Soient D et D' dans $\mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G})$ et $\xi_{DD'}$ dans $\mathfrak{G}$ tels que $[D, D'] = \operatorname{ad} \xi_{DD'}$. Soit Θ l'application bilinéaire alternée définie dans $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathfrak{G}$: $\Theta((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1 y_2 - x_2 y_1)\xi_{DD'}$. Notons $\tilde{D}$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G})$ définie par $\tilde{D}(x_1, x_2) = x_1 D + x_2 D'$. Le couple $(\Theta, \hat{D})$ définit une extension de $\mathbb{R}^2$ par $\mathfrak{G}$ dont le crochet est donné par la formule suivante

$$[(X, x), (X'x')] = ([X, X'] + D(x)X' - D(x')X + \Theta(x, x'), 0),$$

où (X, x) et (X', x') sont dans $\mathfrak{G} \times \mathbb{R}^2$. Notons $\mathfrak{G}_{\Theta\hat{D}}$ l'algèbre de Lie ainsi obtenue; il existe des injections canoniques de $\mathfrak{G}_D$ et de $\mathfrak{G}_{D'}$ dans $\mathfrak{G}_{\Theta\hat{D}}$ telles que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{G}_D \arrow[dr] & \\
\mathfrak{G} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathfrak{G}_{\Theta\hat{D}} \\
 & \mathfrak{G}_{D'} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Si $(\mathfrak{G}, \rho)$ vérifie les conditions (p_1) et (p_2) on munira alors $\mathfrak{G}_D$ et $\mathfrak{G}_{DD'}$ des extensions admissibles $(\mathfrak{G}_D, \rho_D)$ et $(\mathfrak{G}_{D'}, \rho_{D'})$. Si $\xi_{DD'} = A_D U_{D'} - A_{D'} U_D$ alors les structures $(\mathfrak{G}_D, \rho_D)$ et $(\mathfrak{G}_{D'}, \rho_{D'})$ sont induites par une KV-structure $(\mathfrak{G}_{\Theta\hat{D}}, \rho_{\Theta\hat{D}})$. On définit $\rho_{\Theta\tilde{D}}$ en posant

$$\rho_{\Theta\hat{D}}(X, x) = \begin{bmatrix} \rho(X) + A(x) & (\rho(X) + A(x))U_D & (\rho(X) + A(x))U_{D'} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

où $A(x) = x_1 A_D + x_2 A_{D'}$. Cette formule est un cas particulier d'une formule d'extension donnée dans [4].

V. Construction des KV-structures normales ayant les propriétés $\mathscr{P}_F$

A ce stade on a fait des pas décisifs vers la solution du problème d'existence des structures affines homotopes à zéro dans les groupes de Lie nilpotents. En effet le Théorème 4.2.1 suggère d'adopter une démonstration (du théorème d'existence) par récurrence sur la dimension de groupe de Lie; les propriétés $\mathscr{P}_F$ fourniront en outre une démonstration constructive. Afin de mettre en évidence des propriétés fines des structures jouissant des propriétés $\mathscr{P}_F$, on adoptera une preuve par récurrence non sur la dimension du groupe, mais sur celle de sous-groupe des commutateurs. Cette stratégie est légitimée par l'unitité des structures normales des groupes de Lie commutatifs.

Dans [4] on a prouvé que les KV-structures normales ont la propriété de $H^2(G, \mathbb{R})$-relèvement. On sait par contre qu'il existe de KV-structures normales qui n'ont pas la propriété d'extension (voir Example 3.1.2). Dans ce paragraphe on va prouver que tout groupe de Lie nilpotent connexe G possède une KV-structure normale qui a les propriétés $\mathscr{P}_F$. Une telle structure a donc à la fois la propriétéde $[\mathscr{D}^0_F(G)]$-extension et de $H^2(G, \mathbb{R})$-relèvement.

Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie nilpotente. On commence par fixer un drapeau normal de type central $F(\mathfrak{G}) = 0 \subset \mathfrak{G}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{G}$. Soit $n = \dim \mathfrak{G}$; soit $m = \dim \mathfrak{G}/[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$; on sait que l'idéal $\mathfrak{G}_{n-m}$ de la filtration $F(\mathfrak{G})$ coincide avec l'idéal dérivé $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$. Notons $\mathfrak{A}_{n-k} = \mathfrak{G}/\mathfrak{G}_k$; l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ est obtenu à partir de l'algèbre de Lie commutative $\mathfrak{A}_m$ par une cascade de $n-m$ extensions centrales de codimension 1

$$\mathfrak{A}_{m+l+1} = (\Omega_l, \mathfrak{A}_{m+l}).$$

Nous allons commencer par examiner en détail le cas où $n - mu = 1$.

5.1. Extensions centrales des algèbres de Lie commutatives. Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie commutative de dimension m. On munit $\mathfrak{G}$ de sa KV-structure triviale $(\mathfrak{G}, \sigma)$.

Soit $\Omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{G}^*$; on munira $\mathfrak{G}_\Omega$ du Ω-relèvement admissible $(\mathfrak{G}_\Omega, \rho_\Omega)$ associé à l'application linéaire de $\mathscr{D}^0(\mathfrak{G}) \times \bigwedge^2 \mathfrak{G}^*$ dans $E^0(\mathfrak{G}) \times \mathfrak{G} \times Z^1_\sigma(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*)$ définie par $(D, \Omega) \to (D, 0, \frac{1}{2}\Omega^\#)$. Soit $2r$ le rang de $\Omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{G}^*$. On fixe une base de $\mathfrak{G}$ $(e_1, \cdots, e_{2r, \dots, e_n})$ qui jouit des deux propriétés suivantes:

(a) $(e_{2r+1}, \cdots, e_n)$ engendre le noyau de Ω;

(b) Soit $(\theta^1, \cdots, \theta^n)$ la base duale de $(e_1, \cdots, e_n)$, on a

$$\Omega = \sum_{i=0}^{r-1} \theta^{2i+1} \wedge \theta^{2i+2}.$$

Posons $e_0 = (1, 0) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_\Omega$. Notons $F(\mathfrak{G}_\Omega)$ le drapeau de $\mathfrak{G}_\Omega$ engendré par la base $(e_0, e_1, \cdots, e_n)$.

D'une façon générale on dira qu'un drapeau $F(\mathfrak{G}_\Omega)$ est admissible s'il est engendré par une base $(v_0, v_1, \cdots, v_n)$ dont la projection dans $\mathfrak{G}$ vérifie les conditions (a) et (b) ci-dessus; le premier résultat qui nous intéresse est le suivant.

Lemme 5.1.1. *Les notations étant celles ci-dessus si* Ω *est une forme symplectique dans* $\mathfrak{G}$ *alors* $(\mathfrak{G}_\Omega, \rho_\Omega)$ *a les propriétés* $\mathscr{P}_F$.

Preuve. Si $\dim \mathfrak{G} = 2$ alors $\mathfrak{G}_\Omega$ est l'algèbre de Heisenberg et le résultat est vrai (voir Exemple 4.2.2). Supposons que l'on ait $\dim \mathfrak{G} > 2$; compte tenu du Corollaire 4.2.2 $(\mathfrak{G}_\Omega, \rho_\Omega)$ vérifie les conditions (p_1) et (p_2). Il reste donc à vérifier que $(\mathfrak{G}_\Omega, \rho_\Omega)$ vérifie (p_3) et (p_4). Soit $\hat{\Omega} \in Z^2(\mathfrak{G}_\Omega, \mathbb{R})$; dans la base $(e_1, \cdots, e_{2r})$ on représente $\hat{\Omega}$ par la matrice

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & {}^t\Lambda \\ -\Lambda & \hat{\omega} \end{bmatrix},$$

où $\hat{\omega} \in \bigwedge^2 \mathfrak{G}^*$ et $\Lambda \in \mathfrak{G}^*$. On a donc pour (x, X) et (y, Y) dans $\mathfrak{G}_\Omega = \mathbb{R} \times \mathfrak{G}$, $\hat{\Omega}((x, X), (y, Y)) = \hat{\omega}(X, Y) + \Lambda(xY - yX)$. Il résulte de la fermeture de $\hat{\Omega}$, i.e., $\delta\hat{\Omega} = 0$, que $\Lambda \wedge \Omega = 0$. Puisque Ω est de rang maximal et que $2r > 2$ la condition $\Lambda \wedge \Omega = 0$ entraîne $\Lambda = 0$. Considérons la cochaine $\Phi_{\hat{\Omega}} \in C^1_{\rho_\Omega}(\mathfrak{G}_\Omega, \mathfrak{G}^*_\Omega)$ défini par la formule suivante:

$$\Phi_{\hat{\Omega}}((x, X), (y, Y)) = \tfrac{1}{2}\hat{\omega}(X, Y).$$

On a évidemment $\partial\Phi_{\hat{\Omega}} = \hat{\Omega}$ et $d_{\rho_\Omega}\Phi_{\hat{\Omega}} = 0$. Cela prouve que $\partial H^1_{\rho_\Omega}(\mathfrak{G}_\Omega, \mathfrak{G}^*_\Omega) = H^2(\mathfrak{G}_\Omega, \mathbb{R})$. Soit maintenant $\tilde{D} \in \mathscr{D}^0_F(\mathfrak{G}_\Omega)$; dans la base $(e_0, \cdots, e_{2r})$ on a

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & D_0 \end{bmatrix},$$

où $D_0 \in \mathscr{D}^0_F(\mathfrak{G})$. Notons $A_{\tilde{D}}$ l'endomorphisme de $\mathfrak{G}_\Omega$ défini par $A_{\tilde{D}}(x, X) = (\alpha(X), D_0X)$. On a

$$[A_{\tilde{D}}, \rho_\Omega(X)] = \rho_\Omega(\tilde{D}X)$$

pour $X \in \mathfrak{G}_\Omega$. Soit V_α l'unique élément de $\mathfrak{G}$ tel que $\alpha = \Omega^\#\ (V_\alpha)$ et posons $U_{\tilde{D}} = (v, V_\alpha)$, on a alors $(A_{\tilde{D}} - \tilde{D})(X) = \rho_\Omega(X)U_{\tilde{D}}$ pour tout $X \in \mathfrak{G}_\Omega$. Pour montrer qu'il existe $a \in \mathfrak{G}^*_\Omega$ tel que

$$\Phi_{\hat{\Omega}}(\tilde{D}X, Y) + \Phi_{\hat{\Omega}}(X, A_{\tilde{D}}Y) = a(\rho_\Omega(X)Y)$$

posons

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'élément

$$\Theta_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega(V_\alpha) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est une dérivation intérieure de $\mathfrak{G}_\Omega$. On associe à Θ_α le couple $(\rho_\Omega(V_\alpha), V_\alpha) \in E_F^0(\mathfrak{G}_\Omega) \times \mathfrak{G}_\Omega$, on a

$$\Phi_{\hat\Omega}([V_\alpha, X], Y) + \Phi_{\hat\Omega}(X, \rho_\Omega(V_\alpha)Y) = \Phi_{\hat\Omega}(V_\alpha, \rho_\Omega(X)Y).$$

Pour montrer que $(\mathfrak{G}_\Omega, \rho_\Omega)$ vérifie (p_3) il suffit de la faire pour les dérivations de la forme

$$\tilde D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_0 \end{bmatrix}$$

avec $\tilde D\hat\Omega \sim 0$. Conformément aux notations adoptées on associe à $\tilde D$ l'endomorphisme

$$A_{\tilde D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_0 \end{bmatrix}.$$

D'après l'hypothèse $\tilde D\hat\Omega \sim 0$ il existe une constante réelle K telle que pour (x, X) et (y, Y) dans $\mathfrak{G}_\Omega$ on a

$$D_0\hat\omega(X, Y) = K\Omega(X, Y).$$

On a donc

$$\begin{aligned}\Phi_{\hat\Omega}(\tilde D(x, X), (y, Y)) + \Phi_{\hat\Omega}((x, X), A_{\tilde D}(y, Y)) \\ = \tfrac{1}{2}D_0\hat\omega(X, Y) = K\Omega(X, Y) = \theta^0(\rho_\Omega(x, X)\cdot(y, Y)),\end{aligned}$$

où θ^0 est la forme linéaire définie dans $\mathfrak{G}_\Omega$ par $\theta^0(x, X) = \frac{K}{2}x$. La KV-structure $(\mathfrak{G}_\Omega, \rho_\Omega)$ vérifie (p_3).

(p_4) Soient $\tilde D$ et $\tilde D'$ dans $\mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G}_\Omega)$; soient β et β' dans $\mathfrak{G}_\Omega^*$ tels que $\tilde D\hat\Omega = \delta\beta$, $\tilde D'\hat\Omega = \delta\beta'$ et $\tilde D\beta' - \tilde D'\beta = \hat\Omega^\#(A_{\tilde D}U_{\tilde D'} - A_{\tilde D'}U_D)$. Posons $\beta = (K, \beta_0)$, $\beta' = (K', \beta_0')$ (on identifie $\mathfrak{G}_\Omega^*$ avec $\mathbb{R}\times\mathfrak{G}^*$). On a alors

$$\tilde D\hat\Omega((x, X), (y, Y)) = K\Omega(X, Y), \quad \tilde D'\hat\Omega((x, X), (y, Y)) = K'\Omega(X, Y).$$

Conformément aux définitions antérieures on considère les primitives $a_{\tilde D}$ et $a_{\tilde D'}$ de $\psi_{\hat\Omega\tilde D}$ et de $\psi_{\hat\Omega\tilde D'}$ respectivement qui sont définis par:

$$\begin{aligned}a_{\tilde D}(x, X) &= Kx + \beta_0(X) + \tfrac{1}{2}\hat\omega(X, V_\alpha), \\ a_{\tilde D'}(x, X) &= K'x\beta_0'(X) + \tfrac{1}{2}\hat\omega(X, V_{\alpha'})\end{aligned}$$

(on rappelle que l'on a

$$\tilde D = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & D_0 \end{bmatrix} \text{ et } \tilde D' = \begin{bmatrix} 0 & \alpha' \\ 0 & D_0' \end{bmatrix}\Bigg).$$

On a donc

$$A_{\tilde{D}'}a_{\tilde{D}} = \left(0\,,\, K\frac{\alpha'}{2} + \left(\beta_0 D_0' - \frac{1}{2}\hat{\omega}(V_\alpha)\circ D_0'\right)\right).$$

Par conséquent

$$A_{\tilde{D}}a_{\tilde{D}'} - A_{\tilde{D}'}a_{\tilde{D}} = \left(0\,,\, K\frac{\alpha'}{2} - K'\frac{\alpha}{2} + \beta_0 D_0' - \beta_0' D_0 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\omega^{\#}(V_{\alpha'})\circ D_0 - \frac{1}{2}\omega^{\#}(V_\alpha)\circ D_0'\right).$$

Puisque

$$\tilde{D}\beta' - \tilde{D}\,;\, \beta = (0\,,\, K\alpha' - K'\alpha + \beta_0' D_0 - \beta_0 D_0') = (0\,,\, \hat{\omega}^{\#}(D_0 V_{\alpha'} - D_0' V_\alpha)).$$

On voit que $K\alpha' - K'\alpha + \beta_0 D_0' - \beta_0' D_0 = \omega^{\#}(D_0 V_{\alpha'} - D_0' V_\alpha)$. Il en résulte que l'on a

$$\begin{aligned} A_{\tilde{D}}a_{\tilde{D}'} - A_{\tilde{D}'}a_{\tilde{D}} &= (0\,,\, K\alpha' - K'\alpha + \beta_0 D_0' - \beta_0' D_0 - \tfrac{1}{2}\hat{\omega}^{\#}(D_0 V_{\alpha'} - D_0' V_\alpha)) \\ &= (0\,,\, \tfrac{1}{2}\omega^{\#}(D_0 V_{\alpha'} - D_0' V_\alpha)) \end{aligned}$$

et $\Phi_{\hat{\Omega}}(A_{\tilde{D}}U_{\tilde{D}'} - A_{\tilde{D}'}U_{\tilde{D}}) = (0\,,\, \frac{1}{2}\hat{\omega}^{\#}(D_0 V_{\alpha'} - D_0' V_\alpha))$. On déduit de ces égalités la condition requise

$$A_{\tilde{D}}U_{\tilde{D}'} - A_{\tilde{D}'}U_{\tilde{D}} = \Phi_{\hat{\Omega}}(A_{\tilde{D}}U_{\tilde{D}'} - A_{\tilde{D}'}U_{\tilde{D}}).$$

Ce qui achève la preuve du Lemme 5.1.1.

En combinant le Théorème 4.2.1 et le Lemme 5.1.1 on a le résultat plus général suivant:

Théorème 5.1.1. *Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie commutative munie de sa KV-structure normale triviale $(\mathfrak{G}\,,\,\sigma)$. Soit $\Omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{G}^*$. On considère le relèvement admissible $(\mathfrak{G}_\Omega\,,\,\rho_\Omega)$ de $(\mathfrak{G}\,,\,\sigma)$ dans $\mathfrak{G}_\Omega$. Soit $F(\mathfrak{G})$ un drapeau normal admissible dans $\mathfrak{G}_\Omega$ qui est préservé par ρ_Ω; alors $(\mathfrak{G}_\Omega\,,\,\rho_\Omega)$ a les propriétés $\mathscr{P}_F$.*

Démonstration. Soit $2r$ le rang de Ω. Fixons une base admissible $(e_0\,,\,e_1\,,\,\cdots\,,\,e_n)$ de $\mathfrak{G}_\Omega$ telle que $(e_1\,,\,\cdots\,,\,e_n)$ vérifie les conditions (a) et (b); autrement dit si $(\theta^0\,,\,\theta^1\,,\,\cdots\,,\,\theta^n)$ est la base duale de $(e_0\,,\,\cdots\,,\,e_n)$ on a entre autres $\Omega = \sum_{i=0}^{r-1}\theta^{2i+1}\wedge\theta^{2i+2}$. La restriction de Ω au sous-espace de $\mathfrak{G}$ engendré par $(e_1\,,\,\cdots\,,\,e_{2r})$ est symplectique. En vertu du Lemme 5.1.1 la KV-structure induite par ρ_Ω dans l'idéal de $\mathfrak{G}_\Omega$ engendré par $(e_0\,,\,e_1\,,\,\cdots\,,\,e_{2r})$ a les propriétés $\mathscr{P}_F$. D'un autre côté les structures normales des sous-espaces du drapeau $F(\mathfrak{G})$ (engendré par $(e_1\,,\,\cdots\,,\,e_n)$) ont les propriétés $\mathscr{P}_F$. En appliquant $n-2r$ fois le Théorème 4.2.1 aux idéaux de $\mathfrak{G}_\Omega$ engendrés par $(e_0, e_1, \cdots, e_{2r+l})$, $1 \le l \le n-2r$, on voit que $\mathfrak{G}_\Omega$ a les propriétés $\mathscr{P}_F$, d'où le Théorème 5.1.1.

Nous allons déduire des Théorèmes 4.2.1 et 5.1.1 le théorème de relèvement des propriétés $\mathscr{P}_F$ dans les relèvements admissibles.

Théorème 5.1.2. *Soit $(\mathfrak{G}, \sigma)$ une algèbre de Lie commutative munie de sa KV-structure triviale. Soit $\Omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{G}^*$ et soit $F(\mathfrak{G}_\Omega)$ un drapeau normal admissible engendré par une base $(e_0, \cdots, e_{2r}, \cdots, e_n)$ où $2r = \operatorname{rang}\Omega$. Alors on a $\partial^1 H^1_{\rho\Omega}(\mathfrak{G}_\Omega, \mathfrak{G}^*_\Omega) = H^2(\mathfrak{G}_\Omega, \mathbb{R})$ et pour tout $\hat{\Omega} \in Z^2(\mathfrak{G}_\Omega, \mathbb{R})$ tout $\hat{\Omega}$-relèvement admissible $(\mathfrak{G}_{\Omega\hat{\Omega}}, \rho_{\Omega\hat{\Omega}})$ de $(\mathfrak{G}_\Omega, \rho_\Omega)$ a les propriétés $\mathscr{F}$; ρ_Ω étant le Ω-relèvement admissible de $(\mathfrak{G}, \sigma)$ associé à $\Phi_\Omega = \frac{1}{2}\Omega^\#$.*

Démonstration. Le point de départ de la démonstration est la remarque suivante: si $\Omega = 0$ le théorème est trivialement vrai; sinon l'idéal de $\mathfrak{G}_\Omega$ engendré par (e_0, e_1, e_2) est l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{H}_3$. Soit $F(\mathfrak{G}_{\Omega\hat{\Omega}})$ le drapeau de $\mathfrak{G}_{\Omega\hat{\Omega}}$ obtenu en prenant l'image réciproque de $F(\mathfrak{G}_\Omega)$ par la projection canonique $\mathfrak{G}_{\Omega\hat{\Omega}} \to \mathfrak{G}_\Omega$. On a le diagramme commutatif déduit de la projection $\pi\colon F(\mathfrak{G}_{\Omega\hat{\Omega}}) \to F(\mathfrak{G}_\Omega)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
(\mathfrak{G}_{\Omega\hat{\Omega}})_3 & \longrightarrow & (\mathfrak{G}_{\Omega\hat{\Omega}})_4 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathfrak{G}_{\Omega\hat{\Omega}} \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
(\mathfrak{G}_\Omega)_2 & \longrightarrow & \mathfrak{H}_3 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathfrak{G}_\Omega
\end{array}$$

En vertu du Théorème 5.1.1 les KV-structures de la seconde ligne ont les propriétés $\mathscr{P}_F$. D'un autre côté la KV-structure de $\mathfrak{H}_3$ est celle de l'Exemple 3.4.2 et on a $\partial H^1_{\rho\Omega}(\mathfrak{H}_3, \mathfrak{H}_3^*) = H^2(\mathfrak{H}_3, \mathbb{R})$. On observe alors que si $(\mathfrak{G}_{\Omega\hat{\Omega}})_3$ est commutative alors la KV-structure hérités de $(\mathfrak{G}_{\Omega\hat{\Omega}}, \rho_{\Omega\hat{\Omega}})$ est triviale, sinon $(\mathfrak{G}_{\Omega\hat{\Omega}})_3$ est l'algèbre $\mathfrak{H}_3$ munie de sa KV-structure de l'Exemple 3.4.2. Il en découle que dans tous les cas de figure, le Théorème 4.2.1 s'applique et assure que $(\mathfrak{G}_{\Omega\hat{\Omega}})_4$ possède une KV-structure ayant les propriétés $\mathscr{P}_F$ et se projetant sur $(\mathfrak{H}_3, \rho_{\Omega|\mathfrak{H}_3})$. En vertu du Corollaire 4.2.3 on voit que

$$\partial H^1_{\rho_\Omega}((\mathfrak{G}_\Omega)_4, (\mathfrak{G}_\Omega)_4^*) = H^2((\mathfrak{G}_\Omega)_4, \mathbb{R}).$$

En iterrant l'application du Théorème 4.2.1 et du Corollaire 4.2.3 on conclut que $\partial H^1_{\rho_\Omega}(\mathfrak{G}_\Omega, \mathfrak{G}^*_\Omega) = H^2(\mathfrak{G}_\Omega, \mathbb{R})$ et que $(\mathfrak{G}_\Omega, \rho_\Omega)$ a les propriétés $\mathscr{P}_F$. Cela achève la démonstration du Théorème 5.1.2.

5.2. Extensions et relèvements des propriétés $\mathscr{P}_F$. Soit $\mathfrak{H}\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{A}$ un homomorphisme surjectif de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{H}$ envoie la suite centrale descendante de $\mathfrak{G}$ sur celle de $\mathfrak{A}$. Supposons que $\mathfrak{G}$ soit un algèbre de Lie nilpotente de dimension $n+k$ où $k = \dim[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$. Si $F(\mathfrak{G})$ est un drapeau normal de type central alors on a $\mathfrak{G}_k = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$. Posons comme indiqué au numéro précédent $a_{n+l} = \mathfrak{G}/\mathfrak{G}_{k-l}$ avec $0 \le l \le k$. Le drapeau $F(\mathfrak{G})$ se projette dans chacun des $\mathfrak{A} + n + l$ en un drapeau normal de type central $F(\mathfrak{A}_{n+l})$; d'autre part $\mathfrak{A}_{n+l+1}$ est une extension centrale de codimension 1 de $\mathfrak{A}_{n+l}$; on a donc $\mathfrak{A}_{n+l+1} = (\Omega_l, \mathfrak{A}_{n+l})$; l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}_n$ est commutative. Pour tout nombre entier naturel p avec $n+l \ge p \ge l$ on notera $\mathfrak{A}_{n+l,p}$ l'idéal $\mathfrak{G}_{p+l}/\mathfrak{G}_l$ de $\mathfrak{A}_{n+l}$; l'image de $F(\mathfrak{G})$ par la projection canonique de $\mathfrak{G}$ sur $\mathfrak{A}_{n+l}$ n'est pas autre chose que la filtration de $\mathfrak{A}_{n+l}$ par les $\mathfrak{A}_{n+l,p}$. Il est clair aussi que tout drapeau de $\mathfrak{A}_n$ se relève en un drapeau normal de type central dans chacune des extensions centrales $\mathbb{R} \to \mathfrak{A}_{n+l+1} \to \mathfrak{A}_{n+l}$.

Dans la suite on fixe un drapeau normal de type central $F_a(\mathfrak{G})$ qui se projette en un drapeau normal admissible pour l'extension

$$\mathbb{R} \to \mathfrak{A}_{n+1} \to \mathfrak{A}_n.$$

En d'autres termes $F_n(\mathfrak{G})$ est engendré par une base $(e_{n+k}, \cdots, e_2, e_1)$ de $\mathfrak{G}$ qui a les propriétés suivantes:

(a) pour tout $l \le k-1$, $(e_{n+l}, \cdots, e_n, \cdots, e_1)$ engendre $F(\mathfrak{A}_{n+l})$,

(b) soient $2r$ le range de $\Omega_0 \in \bigwedge^2 \mathfrak{A}_n^*$ et $(\theta^{n+k}, \cdots, \theta^1)$ la base duale de $(e_{n+k}, \cdots, e_1)$, on a $\Omega_0 = \sum_{i=0}^{r-1} \theta^{n-2i} \wedge \theta^{n-1-2i}$. On a nécessairement $\Omega_0 \neq 0$.

Par ailleurs on désignera par D_{pl} l'élément de $\mathscr{D}_F^0(\mathfrak{A}_{n+l}, p)$ tel que l'on a

$$\mathfrak{A}_{n+l,p+1} = (\mathfrak{A}_{n+l,p}, D_{pl})$$

de sorte que le carré suivant est commutitif

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A}_{n+l+1,p+1} & \longrightarrow & \mathfrak{A}_{n+l+1,p+2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{A}_{n+l,p} & \longrightarrow & \mathfrak{A}_{n+l,p+1} \end{array}$$

ce diagramme est déduit de la projection canonique $F(\mathfrak{A}_{n+l+1}) \to F(\mathfrak{A}_{n+l})$. Nous voici devant la dernière porte vers le théorème d'existence des structures affines homotopes à zéro dans les groupes de Lie nilpotents. La démonstration aura lieu localement, c'est-à-dire au niveau des KV-structures des algèbrers de Lie. Le théorème énoncé dans l'introduction est un corollaire du Théorème 5.2.1 suivant.

Théorème 5.2.1. *Soit* $\mathfrak{G}$ *une algèbre de Lie nilpotente de dimension* $n+k$ *où* $k = \dim[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$. *On fixe un drapeau normal de type central* *et admissible* $F_a(\mathfrak{G})$ *comme décrit ci-dessus. Soit* $(\Omega_l, \mathfrak{A}_{n+l})$ *la cascade de* k *extensions centrales qui détermine* $\mathfrak{G}$ *à partir de l'algèbre de Lie commutative* $\Lambda := \mathfrak{A}_n$. *Alors* $\mathfrak{G}$ *possède KV-une structure normale* $(\mathfrak{G}, \rho)$ *qui satisfait aux conditions suivantes*:

(i) ρ *préserve* $F_a(\mathfrak{G})$.

(ii) *Pour tout couple* (p, l) *de nombres entiers naturels avec* $n + l \geq p \geq l$ *la KV-structure* $(\mathfrak{A}_{n+l,p}, \rho_{pl})$ *induite par la KV-structure quotient de* $(\mathfrak{G}, \rho)$ *par la projection canonique* $\mathfrak{G} \to \mathfrak{A}_{n+l}$, *a les propriétés* $\mathscr{P}_F$.

(iii) *Pour tout* (p, l) *comme ci-dessus* $(\mathfrak{A}_{n+l+1,p+1}, \rho_{p+1,l+1})$ (*resp.* $(\mathfrak{A}_{n+l,p+1}, \rho_{p+1,l})$) *est un relèvement admissible* (*resp. est une* D_{pl}-*extension admissible*) *de* $(\mathfrak{A}_{n+l,p}, \rho_{pl})$.

(iv) *Pour tout* $D \in \mathscr{D}_F^0(\mathfrak{A}_{n+l})$ *il existe une* D-*extension admissible de* $(\mathfrak{A}_{n+l}, \rho_l)$ *dans* $(\mathfrak{A}_{n+l}, D)$ *qui a les propriétés* $\mathscr{P}_F$.

(v) *Pour tout idéal* $\mathfrak{G}_p$ *de* $F_a(\mathfrak{G})$ *et tout* $\hat{\Omega} \in Z^2(\mathfrak{G}_p, \mathbb{R})$ *il existe une* $\hat{\Omega}$-*relèvement admissible de la KV-structure de* $\mathfrak{G}_p$ *induite par* $(\mathfrak{G}, \rho)$ *qui a les propriétés* $\mathscr{P}_F$.

Démonstration. Nous allons procéder par récurrence sur la dimension k du premier idéal dérivé $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, ou si l'on veut, sur la longueur k de la cascade d'extensions centrales

$$\mathfrak{A}_{n+l+1} = (\Omega_l, \mathfrak{A}_{n+l}).$$

Etape 1. On suppose que $k = 1$; l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ est une extension centrale de codimension 1 de l'algèbre de Lie commutative $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}/[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$; soit $\Omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{A}^*$ tel que $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_\Omega$. On munit alors $\mathfrak{G}$ du Ω-relèvement admissible ρ_Ω de la structure triviale $(\mathfrak{A}, \sigma)$ qui est déterminé par $\Phi_\Omega = \frac{1}{2}\Omega^\# \in Z_\sigma^1(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*)$. En vertu du Théorème 5.1.2 les assertions (i), (ii), (iii) et (v) sont vraies. Pour établir la véracité de l'assertion (iv) on considère $D \in \mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G})$ et on munit $\mathfrak{G}_D$ d'une D-extension admissible $(\mathfrak{G}_D, \rho_D)$ de $(\mathfrak{G}, \rho_\Omega)$; $\mathfrak{G}_D$ est filtré par le drapeau $F_a(\mathfrak{G}_D) = F(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{G}_D$. Soit $\mathscr{A} = \mathfrak{G}_D/[\mathfrak{G}_D, \mathfrak{G}_D]$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{G}_D$ est déterminée par une cascade d'extensions centrales de codimension 1 $(\Theta_l, \mathscr{A}_l)$ avec $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A}$. Notons $\mathscr{B}_l$ l'image de $\mathfrak{G}$ dans $\mathscr{A}_l$ par la projection canonique de $\mathfrak{G}_D$ sur $\mathscr{A}_l$. On a donc à chaque niveau l le carré commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{B}_{l+1} & \longrightarrow & \mathscr{A}_{l+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{B}_l & \longrightarrow & \mathscr{A}_l \end{array}$$

On observe maintenant que les KV-structures quotients de ρ_D (donc de

ρ_Ω) dans les $\mathscr{B}_l$ ont toutes les propriétés $\mathscr{P}_F$ d'une part, et que le quotient de ρ_D dans $\mathscr{A}$ étant la KV-structure triviale $(\mathscr{A}, \sigma)$ celle-ci a les propriétés $\mathscr{P}_F$.

Par conséquent si on considère le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{B}_1 & \longrightarrow & \mathscr{A}_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{B}_0 & \longrightarrow & \mathscr{A} \end{array}$$

le Théorème 4.2.1 assure que la KV-structure quotient de $(\mathfrak{G}_D, \rho_D)$ dans $\mathscr{A}_1$ a les propriétés $\mathscr{P}_F$. En itérant l'application du Théorème 4.2.1 et en tenant compte du fait $(\mathfrak{G}, \rho_\Omega)$ a les propriétés $\mathscr{P}_F$ on voit que $(\mathfrak{G}_D, \rho_D)$ a les propriétés $\mathscr{P}_F$.

Etape 2. On suppose que les assertions (i) à (v) du Théorème 5.2.1 sont vraies pour les algèbres de Lie nilpotentes $\mathfrak{G}$ avec $\dim[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}] \leq k_0$. Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension $n + k_0 + 1$ avec $\dim([\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]) = k_0 + 1$. On fixe un drapeau normal de type central admissible $F_a(\mathfrak{G})$; on conserve les notations précédentes; on obtient $\mathfrak{G}$ par une cascade de $k+1$ extensions $\mathfrak{A}_{n+l+1} = (\Omega_l, \mathfrak{A}_{n+l})$ à partir de l'algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{A}_n$. Posons

$$F_a(\mathfrak{G}) = 0 \subset \mathfrak{G}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{G}_{k_0} \subset \mathfrak{G}_{k_0+1} \subset \cdots \subset \mathfrak{G}.$$

Il existe $p \in \mathbb{N}$ avec $k_0 + 1 < p < n + k_0 + 1$ tel que

$$\dim[\mathfrak{G}_p, \mathfrak{G}_p] \leq k_0.$$

On peut donc munir $\mathfrak{G}_p$ d'une KV-structure $(\mathfrak{G}_p, \rho_p)$ qui vérifie le Théorème 5.2.1. Nous considérons le diagramme commutatif d'homomorphismes d'algèbre de Lie suivant:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{G}_p & \longrightarrow & \mathfrak{G}_{p+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathfrak{G} \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \mathfrak{A}_{n+k_0, p-1} & \longrightarrow & \mathfrak{A}_{n+k_0, p} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathfrak{A}_{n+k_0} \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \mathfrak{A}_{n, p-k_0-1} & \longrightarrow & \mathfrak{A}_{n, p-k_0} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathfrak{A}_n \end{array}$$

Dans le diagramme ci-dessus les lignes sont les applications inclusion des drapeaux $F_a(\mathfrak{A}_{n+1})$ et les colonnes sont les homomorphismes canoniques déduits des extensions centrales

$$\mathbb{R} \to \mathfrak{A}_{n+l+1\,,\,p+1} \to \mathfrak{A}_{n+l\,,\,p}.$$

En fait la KV-structure de $\mathfrak{G}_p$ est obtenue par une cascade de relèvements admissibles à partir de la structure triviale de $\mathfrak{A}_{n\,,\,p-k_0-1}$. Considérons l'avant dernière ligne

$$\mathfrak{A}_{n+1\,,\,p-k_0} \to \mathfrak{A}_{n+1\,,\,p-k_0+1} \to \cdots \to \mathfrak{A}_{n+1}.$$

On va la munir de la suite de relèvements admissibles des structures normales triviales $(\mathfrak{A}_{n\,,\,p-k_0+l}\,,\,0)$ qui sont induites par les relèvements $(\mathfrak{A}_{n+1}\,,\,\rho_\Omega)$ associés aux $\Phi_\Omega = \frac{1}{2}\Omega_0^\#$; en vertu du Théorème 5.1.1 les structures ainsi obtenues ont les propriétés $\mathscr{P}_F$. Puisque les structures de la colonne au-dessus de $\mathfrak{A}_{n\,,\,p-k_0-1}$ ont les propriétés $\mathscr{P}_F$, on applique $-1+k_0$ fois le Théorème 4.2.1 à la colonne au-dessus de $\mathfrak{A}_{n\,,\,p-k_0}$ à partir de $\mathfrak{A}_{n+2\,,\,p-k+2}$. On munit ainsi $\mathfrak{G}_{p+1}$ d'une extension admissible de la KV-structure $(\mathfrak{G}_p\,,\,\rho_p)$ qui vérifie les assertions (i), (ii), (iii). Il suffit maintenant de recommencer la même démarche pour les autres colonnes au-dessus des $\mathfrak{A}_{n\,,\,p-k_0+l}$, $l = 1\,,\,2\,,\,\cdots\,,\,p-k_0$; on construit ainsi dans $\mathfrak{G}$ une KV-structure $(\mathfrak{G}\,,\,\rho)$ qui vérifie (i), (ii), et (iii).

Etape 3. Il reste à montrer que la structure $(\mathfrak{G}\,,\,\rho)$ obtenue ci-dessus vérifie les assertions (iv) et (v). Soit $D \in \mathscr{D}_F^0(\mathfrak{G})$. Notons D_l la projection de D dans $\mathscr{D}_F^0(\mathfrak{A}_{n+l})$. Considérons une D-extension admissible $(\mathfrak{G}_D\,,\,\rho_D)$ de $(\mathfrak{G}\,,\,\rho)$. Soit $[(\mathfrak{A}_{n+l}\,,\,D_l)\,,\,\rho_{D_l}]$ le quotient de $(\mathfrak{G}_D\,,\,\rho_D)$ par la projection canonique $\mathfrak{G}_D \to (\mathfrak{A}_{n+l}\,,\,D_l)$; alors ρ_{D_l} est une D_l-extension admissible de $(\mathfrak{A}_{n+l}\,,\,\rho_{\Omega_l})$. En vertu des résultats de l'Etape 1, la D_1-extension admissible $[(\mathfrak{A}_{n+1}\,,\,D_1)\,,\,\rho_{D_1}]$ de $(\mathfrak{A}_{n+1}\,,\,\rho_{\Omega_0})$ a les propriétés $\mathscr{P}_F$. On applique le Théorème 4.2.1 pour montrer que les D_l-extensions admissibles $[(\mathfrak{A}_{n+l}\,,\,D_l)\,,\,\rho_{D_l}]$ ont les propriétés $\mathscr{P}_F$. En effectuant cette opération pour chacun des $(\mathfrak{A}_{n+l}\,,\,\rho_{\Omega_l})$ on voit que $(\mathfrak{G}\,,\,\rho)$ vérifie la condition (iv). Pour terminer considérons $\hat{\Omega} \in Z^2({}'\mathfrak{G}\,,\,R)$ et soit $\mathfrak{G}_{\hat{\Omega}}$ l'extension centrale $(\hat{\Omega}\,,\,\mathfrak{G})$; soit $F_a(\mathfrak{G}_{\hat{\Omega}})$ le drapeau de $\mathfrak{G}_{\hat{\Omega}}$ obtenu par l'image inverse $\pi^{-1}(F_a(\mathfrak{G}))$ où π est la projection canonique de $\mathfrak{G}_{\hat{\Omega}}$ sur $\mathfrak{G}$. Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathfrak{G}_{\hat{\Omega},p+1} & \longrightarrow & \mathfrak{G}_{\hat{\Omega},p+2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathfrak{G}_{\hat{\Omega}} \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\mathfrak{G}_{p} & \longrightarrow & \mathfrak{G}_{p+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathfrak{G}
\end{array}$$

En vertu de l'hypothèse de récurrence on a $\partial H^1_\rho(\mathfrak{G}_p, \mathfrak{G}^*_p) = H^2(\mathfrak{G}_p, \mathbb{R})$ et tout relèvement admissible de $(\mathfrak{G}_p, \rho_p)$ dans $\mathfrak{G}_{\hat{\Omega},p+1}$ a les propriétés $\mathscr{P}_F$. On applique $n + k_0 + 1 - p$ fois le Théorème 4.2.1 aux extraits du diagramme ci-dessus est on obtient un $\hat{\Omega}$-relèvement admissible $(\mathfrak{G}_{\hat{\Omega}}, \rho_{\hat{\Omega}})$ qui a les propriétés $\mathscr{P}_F$. Cela achève la preuve du Théorème 5.2.1.

VI. Retour à la géométrie différentielle

L'objet de ce paragraphe est de mentionner brièvement quelques applications du Théorème 5.2.1. On limitera cet esquisse à deux directions suggérées respectivement par [18], [3] et [6], [25].

6.1. Plongements lagrangiens des groupes de Lie nilpotents. Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe de dimension n. On note $\mathfrak{G}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche dans G et $\mathfrak{G}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}^*$ est l'espace des 1-formes différentielles invariantes à gauche dans G. D'après [6] chaque structure localement plate invariante à gauche (G, ∇) définit une structure de groupe de Lie symplectique dans le fibré contangent $T^*\widetilde{G}$ ($\widetilde{G}$ étant le revêtement universel de G). En effet soit (G, ∇) une structure localement plate invariante à gauche dans G, la connexion linéaire ∇ définit une KV-structure $(\mathfrak{G}, \rho)$ conformément à la formule

$$\rho(X)Y = \nabla_X Y.$$

Soit $\mathfrak{G}^*\#\mathfrak{G}$ le produit semi-direct de $\mathfrak{G}$ par $\mathfrak{G}^*$ associé à la représentation duale $\rho^*: \mathfrak{G} \to \mathrm{End}(\mathfrak{G}^*)$; le crochet dans $\mathfrak{G}^*\#\mathfrak{G}$ est donné par la formule suivante

$$[(\theta, X), (\theta', X')] = (\rho^*(X)\theta' - \rho^*(X')\theta, [X, X']).$$

Soit $G^\#$ le groupe de Lie connexe et simplement connexe dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{G}^* \# \mathfrak{G}$. Si $\widetilde{G}$ est le revêtement universel de G; il est facile de voir que si (G, ∇) est complète alors $G^\#$ est nilpotent; s'il existe un produit semi-direct $\mathfrak{G}^* \# G$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{G}^* & \longrightarrow & G^{\#} & \longrightarrow & \widetilde{G} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{G}^* & \longrightarrow & \mathfrak{G}^* \# G & \longrightarrow & G \end{array}$$

alors le groupe de Lie G possède un polongement lagrangien dans $G^* \# G$ muni de la forme symplectique ω définie par

$$\omega((\theta, X), (\theta', X')) = \theta(X') - \theta'(X).$$

En effet on a $\delta\omega = 0$ et rang $\omega = 2\dim G$. De sorte que $(\mathfrak{G}^* \# G, \omega)$ est une variété symplectique. On a montré dans [6] qu'il existe une scission $G \to \mathfrak{G}^* \# G$ de la suite $\mathfrak{G}^* \to \mathfrak{G}^* \# G \to G$ qui est un plongement lagrangien de G dans $\mathfrak{G}^* \# G$. L'image de la scission ci-dessus coincide avec une feuille du feuilletage de $\mathfrak{G}^* \# G$ par les classes à droite modulo G, feuilletage qui est lagrangien. On déduit donc du Théorème 5.2.1 le résultat suivant.

Théorème 6.1.1. *Tout groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe G possède un plongement comme feuille lagrangienne dans un groupe de Lie nilpotent connexe $G^{\#}$ muni d'une structure symplectique invariante à gauche $(G^{\#}, \omega)$. De plus $G^{\#}$ possède une structure localement plate invariante à gauche $(G^{\#}, \nabla^{\#})$ telle que $\nabla^{\#}\omega = 0$.*

Démonstration. On considère dans $G^{\#} = \mathfrak{G}^* \# G$ la structure localement plate invariante associée à la KV-structure de $\mathfrak{G}^* \# \mathfrak{G}$ suivante: soient (θ, X) et (θ', X') dans $\mathfrak{G}^* \# \mathfrak{G}$, on pose

$$\rho^{\#}(\theta, X) \cdot (\theta', X') = (\rho^*(X)\theta, \rho(X)X').$$

On déduit de là que la forme symplectique $\omega((\theta, X), (\theta', X')) = \theta(X') - \theta'(X)$ est un invariant pour $\rho^{\#}$; en effet considérons des éléments (θ, X), (θ', X') et (θ'', X'') dans $\mathfrak{G}^* \# \mathfrak{G}$; on a

$$\begin{aligned} \rho^{\#}(\theta, X)\omega((\theta', X'), (\theta'', X'')) &= -\omega((\rho^*(X)\theta', \rho(X)X'), (\theta'', X'')) \\ &\quad - \omega((\theta', X'), (\rho^*(X)\theta'', \rho(X)X'')) \\ &= -\theta'(\rho(X)X'') - \theta''(\rho(X)X') + \theta'(\rho(X)X'') + \theta''(\rho(X)X') \\ &= 0. \end{aligned}$$

On déduit de ce résultat le corollaire suivant:

Théorème 6.1.2. *Tout groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe de dimension n peut être réalisé comme sous-groupe affine du groupe affine symplectique $\mathbb{R}^{2n} \times \mathrm{Sp}(2n)$.*

Si on se place dans l'esprit de [6] on a le corollaire suivant

Corollaire 6.1.3. *Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe de dimension n ; il existe une loi d'opération affine symplectique de G dans $\mathbb{R}^{2n}$ dont les orbites sont des sous-espaces affines lagrangiens.*

On a montré dans [5] qu'étant donné une loi d'action affine de G dans $\mathbb{R}^{2n}$ la condition d'existence d'orbite affine était régie par un théorème de nullité de la classe de la translation de l'action affine.

Le Théorème 6.1.2 donne une réponse partielle au problème de réduction posé dans [18].

6.2. Variétés affines. Une application des plus intéressantes du Théorème 5.2.1 est qu'il permet de construire de nombreux exemples de variétés affines à partir des structures affines des groupes de Lie, c'est-à-dire en fait, à partir des structures localement plates invariantes à gauche.

Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe. Soit (G, ∇) une structure localement plate invariante à gauche dans G. Soit $\mathfrak{G}$ l'algèbre de Lie de G et soit $(\mathfrak{G}, \rho)$ la KV-structure associée à (G, ∇). Soit K le noyau de l'associateur de $(\mathfrak{G}, \rho)$

$$K = \{\xi \in \mathfrak{G} / \rho(X)\rho(Y)\xi = \rho(\rho(X)Y)\xi\,, \forall X \in \mathfrak{G}\,, \forall Y \in \mathfrak{G}\}.$$

Lemme 6.2.1. *K est une sous-algèbre de Koszul-Vinberg de $(\mathfrak{G}, \rho)$.*

Preuve. Soient ξ et ξ' des éléments de K ; pour X et Y dans $\mathfrak{G}$ on a:

$$\begin{aligned}\rho(X)\rho(Y)\rho(\xi)\xi' &= \rho(X)(\rho(Y)\rho(\xi)\xi') \\ &= \rho(X)\rho(\rho(Y)\xi)\xi' = \rho(\rho(X)\rho(Y)\xi)\xi' \\ &= \rho(\rho(\rho(X)Y)\xi)\xi' = \rho(\rho(X)Y)\rho(\xi)\xi'\end{aligned}$$

ce qui montre que $\rho(K)K \subset K$.

Soit $\mathscr{K}$ le sous-groupe de Lie connexe de G associé à la sous-algèbre de Lie K.

Lemme 6.2.2. *$\mathscr{K}$ est un sous-groupe de Lie fermé dans G.*

Preuve. En fait si un élément u de G appartient à $\mathscr{K}$ alors la translation à droite par $u: v \to vu$ est une transformation affine de (G, ∇) ; $\mathscr{K}$ est donc la composante neutre du stabilisateur de ∇ sous l'action de G (dans G) par les automorphismes intérieurs.

On déduit du lemme ci-dessus le résultat suivant:

Proposition 6.2.1. *Soit (G, ∇) une structure localement plate invariante à gauche; soit $\mathscr{K}$ le sous-groupe de Lie connexe associé au noyau de l'associateur de la KV-structure définie par ∇ ; alors $G/\mathscr{K}$ est une variété affine.*

Cette proposition permet de construire des exemples de variété homogènes à partie de KV-structures.

Exemple 6.2.1. Soit G un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est engendrée par la base (Z, X, Y, T) telle que

$$[X, Y] = Z, \qquad [Z, X] = [Z, Y] = [Z, T] = 0,$$
$$[T, X] = Y, \qquad [T, Y] = Z.$$

Soit $(\mathfrak{G}, \rho)$ la KV-structure définie par la formule suivante

$$\rho(z, x, t)(z', x', y', t') = ((x+t)y' - utt', yy'tz' + t'z - vtt', -t'(x+t), 0)$$

où u et v sont des constantes réeles fixées. Le noyau de l'associateur est défini par le système $y = t = 0$.

Exemple 6.2.2. Soit $\mathfrak{G}$ l'algèbre de Lie de dimension 4 engendré par Z, X, Y, T suivant la loi de crochet suivante:

$$[X, Y] = Z, \qquad [X, Z] = [Y, Z] = 0,$$
$$[T, Z] = 2Z, \quad [T, X] = X + Z, \quad [T, Y] = Y.$$

On munit $\mathfrak{G}$ de la KV-structure définie par la représentation linéaire suivante:

$$\rho(z, x, y, t) = \begin{bmatrix} 2t & 2t & x & x \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le noyau de l'associateur est défini par le système suivant

$$z = x = 0, \qquad y + t = 0.$$

Exemple 6.2.3. Soit $G = \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{G} = \mathrm{gl}(2, \mathbb{R})$ soit X, Y, H, T la base de $\mathfrak{G}\mathrm{l}(2, \mathbb{R})$ telle que:

$$xX + yY + hH + tT = \begin{bmatrix} h+t & x \\ y & -h+t \end{bmatrix}.$$

Considérons l'application linéaire de $\mathfrak{G}$ dans $\mathrm{End}(\mathfrak{G})$ définie par

$$\rho(x, y, h, t) = \begin{bmatrix} -h+t & 2y & -3x & x \\ 2x & h+t & 3y & y \\ \frac{-1}{2}y & \frac{x}{2} & t & h \\ \frac{3}{2}y & \frac{3}{2}(x+y) & 2h & t \end{bmatrix}.$$

On vérifie sans difficulté les égalités suivante (voir [18])

$$\rho(\xi)\xi' - \rho(\xi')\xi = [\xi, \xi'], \qquad [\rho(\xi), \rho(\xi')] = \rho[\xi, \xi'].$$

Le noyau de l'associateur de ρ est de dimension 1; de sorte que le sous-groupe de Lie $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ formé des éléments tels que l'automorphisme intérieur $\mathrm{Ad}(s)$ laisse ρ stable est un sous-groupe à un paramètre.

References

[1] L. Auslander, *Simply transitive groups of affine motions*, Amer. J. Math. **99** (1977) 819–829.
[2] N. Boyom, *Algèbre à associateur symetrique et algèbre de Lie réductive*, Thèse Doctorat 3 e cycle, Grenoble, 1968.
[3] ——, *Affine embedding of real Lie groups*, Proc. London Math. Soc. **26** (1977) 21–39.
[4] ——, *Structures affines des groupes de Lie nilpotents*, preprint, Montpellier.
[5] ——, *The lifting problem for affine structure of Lie groups*, to appear.
[6] ——, *Structures affines des espaces homogènes symplectique*, à paraître manuscripta.
[7] B. Y. Chu, *Homogeneous symplectique spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **197** (1979).
[8] C. Chevalley & S. Eilenberg, *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948) 85–124.
[9] D. Fried, W. Goldman & M. Hirsch, *Affine manifolds with nilpotent holonomy group*, Comment. Helv. Math. **56** (1981) 487–523.
[10] V. Guillemin & S. Sternberg, *Algebraic model for transitive differential geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964) 16–47.
[11] S. Helgason, *Differential and symmetric spaces*, Academic Press, New York, 1965.
[12] W. Kaup, Y. Natsushima & T. Ochiai, *On the automorphisms and equivalences of the generalized Siegel domains*, Amer. J. Math. **94** (1970) 475–498.
[13] H. Kim, *Complete left invariant affine structure on nilpotent Lie groups*, J. Differential Geometry **24** (1986) 373–394.
[14] J. L. Koszul, *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie*, Bull. Soc. Math. France **48** (1950) 65–127.
[15] ——, *Domaines bornés et orbites des groupes de transformations affines*, Bull. Soc. Math. France **89** (1961) 515–533.
[16] ——, *Domaine de Vinberg et de Piatetsky Sapiro*, Cours Univ. Lausanne, 1965–1967.
[17] A. Medina, *Flat left invariant connections adapted to automorphism structure of a Lie group*, J. Differential Geometry **16** (1981) 445–474.
[18] J. Milnor, *Fundamental groups of complete affinely flat manifolds*, Advances in Math. **25** (1977) 178–187.
[19] J. Scheunemann, *Translations in certain groups of affine notions*, Proc. Amer. Math. Soc. **47** (1977) 223–228.
[20] ——, *Affine structure of three step nilpotent Lie groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **46** (1974) 451–453.
[21] Séminaire Sophus Lie, École Norm. Sup., Paris, 1954–1955.
[22] H. Shima, *Homogeneous hessian manifold*, Progress in Math., No. 14, Birkhäuser, Boston, 1981, 385–392.
[23] J. M. Singer & S. Sternberg, *The infinite groups of Lie and Cartan*, J. Analyse Math. **15** (1965) 1–114.

[24] S. Sternberg, *Lectures on differential geometry*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964.
[25] J. Vaisman & R. Corina, *Local similarity manifolds*, Ann. Math. Pura Appl. **135** (1983) 279–292.
[26] E. B. Vinberg, *Convex homogeneous cone*, Transl. Moscow Math. Soc. **12** (1963) 340–403.

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC
FRANCE